

## Ασκήσεις 2025-2026

### Λύκειο

## ΤΕΣΤ 1

### ΕΚΔΟΧΗ 1

#### ΑΣΚΗΣΗ 1

Μια χρηματοπιστηριακή εταιρεία έχει 40 υπαλλήλους, των οποίων τα ονόματα είναι καταγεγραμμένα με μια συγκεκριμένη σειρά. Το έτος 2024, το μέσο μόνους των πρώτων 30 στη σειρά υπαλλήλων ήταν 4.000 ευρώ, των τελευταίων 30 υπαλλήλων ήταν 6.000 ευρώ, και των πρώτων 10 και των τελευταίων 10 υπαλλήλων μαζί ήταν 5.000 ευρώ.

Την επόμενη χρονιά, το μέσο μόνους των πρώτων 10 στη σειρά υπαλλήλων αυξήθηκε κατά 100%, των τελευταίων 10 υπαλλήλων αυξήθηκε κατά 200%, ενώ των υπόλοιπων υπαλλήλων παρέμεινε αμετάβλητο.

Ποιο ήταν το μέσο μόνους, σε ευρώ, όλων των 40 υπαλλήλων συνολικά το έτος 2025;

- A. 5.500 ευρώ
- B. 6.750 ευρώ
- Γ. 8.750 ευρώ
- Δ. 9.500 ευρώ**

#### ΛΥΣΗ

Έστω  $x$  το άθροισμα των μόνους των πρώτων 10 υπαλλήλων,  $y$  το άθροισμα των μόνους των δεύτερων 10 υπαλλήλων,  $z$  το άθροισμα των μόνους των τρίτων 10 υπαλλήλων και  $w$  το άθροισμα των μόνους των τελευταίων 10 υπαλλήλων. Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε:

$$x + y + z = 30 * 4.000 = 120.000$$

$$y + z + w = 30 * 6.000 = 180.000$$

$$x + w = 20 * 5.000 = 100.000$$

$$\text{Άρα: } 2x + 2y + 2z + 2w = 400.000 \Rightarrow x + y + z + w = 200.000$$

$$\text{Συνεπώς: } x = 20.000, w = 80.000 \text{ και } y + z = 100.000$$

Το 2025, το μέσο μόνους των πρώτων 10 υπαλλήλων αυξήθηκε κατά 100%:

$$x = 20.000 + 20.000 = 40.000$$

Το 2025, το μέσο μόνους των τελευταίων 10 υπαλλήλων αυξήθηκε κατά 200%:

$$w = 80.000 + 160.000 = 240.000$$

Ο μέσος όρος το έτος 2025 είναι:

$$\frac{40.000 + 100.000 + 240.000}{40} = \frac{380.000}{40} = 9.500$$

**Σωστή απάντηση η Δ.**

## **ΑΣΚΗΣΗ 2**

Έστω ο δεκαδικός αριθμός  $x = 0,123456789101112\dots9899100101102\dots998999$ . Το 2.025ο ψηφίο δεξιά από την υποδιαστολή είναι:

**A. 1**

**B. 3**

**Γ. 6**

**Δ. 8**

## **ΛΥΣΗ**

Παρατηρούμε τα 2.025 πρώτα δεκαδικά ψηφία του  $x$  και έστω ότι το  $z$  συμβολίζει το 2.025ο ψηφίο. Μπορούμε να χωρίσουμε αυτήν τη σειρά ψηφίων  $.123456789 101112\dots9899 100101\dots z$  σε τρία τμήματα:

A  $\rightarrow$   $.123456789$

B  $\rightarrow$   $101112\dots9899$

Γ  $\rightarrow$   $100101102\dots z$

Υπάρχουν 9 ψηφία στο τμήμα Α,  $2 \times 90 = 180$  στο Β, άρα  $2.025 - 189 = 1.836$  στο Γ. Διαιρώντας το 1.836 με το 3, προκύπτει πηλίκο 612 με υπόλοιπο 0. Έτσι, το τμήμα Γ αποτελείται από τους πρώτους 612 τριψήφιους ακέραιους αριθμούς. Δεδομένου ότι ο πρώτος τριψήπιος ακέραιος είναι το 100 (και όχι 101), ο 612ος τριψήπιος ακέραιος είναι:  $100 + 612 - 1 = 711$ . Έτσι, το τελευταίο του ψηφίο είναι:  $z = 1$ .

**Σωστή απάντηση η Α.**

### **ΑΣΚΗΣΗ 3**

Έστω ένα δείγμα 4.000 παρατηρήσεων  $x_1, x_2, \dots, x_{4000}$  που ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή, και για το οποίο γνωρίζουμε ότι:

- 6 παρατηρήσεις είναι μικρότερες από 25,
- 100 παρατηρήσεις είναι μεγαλύτερες από 50.

Ποιος είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος αριθμός  $c$  που πρέπει να προσθέσουμε σε καθεμία από τις τιμές  $x_i$ , με  $i = 1, 2, \dots, 4.000$  ώστε το δείγμα των αριθμών που θα προκύψει να είναι ομοιογενές;

**A. 11**

**B. 13**

**Γ. 15**

**Δ. 19**

### **ΛΥΣΗ**

Σύμφωνα με την άσκηση, έχουμε  $n = 4.000$  παρατηρήσεις που ακολουθούν κανονική κατανομή, εκ των οποίων:

$$6 \text{ παρατηρήσεις είναι μικρότερες του } 25 \Rightarrow P(X < 25) = \frac{6}{4.000} = 0,0015 \approx 0,15\%$$

$$\text{ενώ } 100 \text{ παρατηρήσεις είναι μεγαλύτερες του } 50 \Rightarrow P(X > 50) = \frac{100}{4.000} = 0,025 \approx 2,5\%.$$

Εφόσον κάτω του  $\bar{x} - 3s$  έχουμε στην κανονική κατανομή περίπου το 0,15% των παρατηρήσεων, ενώ αντίστοιχα άνω του  $\bar{x} + 2s$  έχουμε περίπου το 2,5% των παρατηρήσεων, προκύπτει ότι:

$$\bar{x} - 3s \cong 25 \text{ και } \bar{x} + 2s \cong 50 \text{ από τις οποίες λαμβάνουμε ισοδύναμα: } \bar{x} \approx 40 \text{ και } s \approx 5.$$

Επομένως, ο συντελεστής μεταβλητότητας υπολογίζεται ως:  $CV = \frac{s}{\bar{x}} \approx \frac{5}{40} \approx 12,5\%$

Εάν προσθέσουμε έναν θετικό ακέραιο αριθμό  $c$  σε καθεμία εκ των 4.000 παρατηρήσεων, στο νέο δείγμα που θα προκύψει

η μέση τιμή θα είναι:  $\bar{x} + c$  και η τυπική απόκλιση θα παραμείνει αμετάβλητη:  $s = 5$ .

Κατά συνέπεια, για να είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας στο νέο δείγμα μικρότερος του 10%, θα πρέπει:

$$CV_{new} = \frac{s}{\bar{x}+c} < 10\% \Leftrightarrow \frac{5}{40+c} < 0,1 \Leftrightarrow (4 + 0,1 \cdot c) > 5 \Leftrightarrow c > 10.$$

Επομένως, ο ζητούμενος μικρότερος θετικός ακέραιος είναι:  $c = 11$ .

**Σωστή απάντηση η Α.**

#### **ΑΣΚΗΣΗ 4**

Ο Γιάννης ήρθε σε ένα πολυκατάστημα ηλεκτρικών ειδών έχοντας 100 ευρώ στην τσέπη του. Αποφάσισε να αγοράσει δύο είδη προϊόντων, Α και Β. Το προϊόν Α κοστίζει 9 ευρώ το ένα, ενώ το προϊόν Β κοστίζει 5 ευρώ το ένα. Αποφασίζει να αγοράσει έναν θετικό ακέραιο αριθμό προϊόντων και από τα δύο είδη, με τέτοιο τρόπο ώστε τα χρήματα που θα του απομείνουν μετά την αγορά να μην επαρκούν πλέον για να αγοράσει κανένα άλλο από τα δύο προϊόντα. Αν όλες οι επιτρεπτές συνδυαστικές αγορές θεωρούνται εξίσου πιθανές, ποια είναι η πιθανότητα ο Γιάννης να αγοράσει περισσότερα προϊόντα τύπου Α από ό,τι τύπου Β;

A. 5/6

B. 2/9

**Γ. 3/10**

Δ. 7/20

## ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι:

- Σύνολο χρημάτων: 100 €
- Τιμή προϊόντος A = 9 €
- Τιμή προϊόντος B = 5 €
- Ο Γιάννης αγοράζει θετικούς ακέραιους αριθμούς και από τα δύο προϊόντα, δηλαδή  $x > 0$  προϊόντα τύπου A και  $y > 0$  προϊόντα τύπου B.

**Περιορισμός:** Τα χρήματα που θα απομείνουν μετά την αγορά δεν αρκούν για να αγοράσει κανένα προϊόν.

$$100 - (9x + 5y) < 5$$

Άρα:

$$9x + 5y > 95$$

Επιπλέον, δεν μπορεί να ξοδέψει περισσότερα από 100 €, άρα:

$$9x + 5y \leq 100$$

Άρα οι επιτρεπτές τιμές ικανοποιούν τη σχέση:

$$95 < 9x + 5y \leq 100, \quad x > 0, \quad y > 0$$

Άρα πρέπει  $9x + 5y = 96, 97, 98, 99, 100$

Έστω η  $9x + 5y = 96$ , δηλ. η σχέση

$$y = \frac{96 - 9x}{5}$$

- $x=1 \rightarrow y=87/5=17,4$
- $x=2 \rightarrow y=78/5=15,6$
- $x=3 \rightarrow y=69/5=13,8$
- $x=4 \rightarrow y=60/5=12$  ✓
- $x=5 \rightarrow y=51/5=10,2$

- $x=6 \rightarrow y=42/5=8,4$
- $x=7 \rightarrow y=33/5=6,6$
- $x=8 \rightarrow y=24/5=4,8$
- $x=9 \rightarrow y=15/5=3$  ✓
- $x=10 \rightarrow y=6/5=1,2$

Άρα αποδεκτές λύσεις είναι οι: (4,12), (9,3)

Ομοίως, βρίσκουμε ότι:

Για την  $9x + 5y = 97$

- $x=3 \rightarrow y=(97-27)/5=14$  ✓
- $x=8 \rightarrow y=(97-72)/5=5$  ✓

Λύσεις: (3,14), (8,5)

Για την  $9x + 5y = 98$

- $x=2 \rightarrow y=(98-18)/5=16$  ✓
- $x=7 \rightarrow y=(98-63)/5=7$  ✓

Λύσεις: (2,16), (7,7)

Για την  $9x + 5y = 99$

- $x=1 \rightarrow y=(99-9)/5=18$  ✓
- $x=6 \rightarrow y=(99-54)/5=9$  ✓

Λύσεις: (1,18), (6,9)

Για την  $9x + 5y = 100$

- $x=5 \rightarrow y=(100-45)/5=11$  ✓
- $x=10 \rightarrow y=(100-90)/5=2$  ✓

Λύσεις: (5,11), (10,2)

Επομένως, η λίστα όλων των επιτρεπτών ζευγών είναι:

(4,12), (9,3), (3,14), (8,5), (2,16), (7,7), (1,18), (6,9), (5,11), (10,2)

Σύνολο = 10 ζεύγη

Βρίσκουμε τα ζεύγη που έχουν  $x > y$ :

- $(4,12) \rightarrow x < y$ . Απορρίπτεται
- $(9,3) \rightarrow x > y$ . Δεκτό
- $(3,14) \rightarrow x < y$ . Απορρίπτεται
- $(8,5) \rightarrow x > y$ . Δεκτό
- $(2,16) \rightarrow x < y$ . Απορρίπτεται
- $(7,7) \rightarrow x = y$ . Απορρίπτεται
- $(1,18) \rightarrow x < y$ . Απορρίπτεται
- $(6,9) \rightarrow x < y$ . Απορρίπτεται
- $(5,11) \rightarrow x < y$ . Απορρίπτεται
- $(10,2) \rightarrow x > y$ . Δεκτό

Συνεπώς, συνολικά 3 ζεύγη έχουν περισσότερα προϊόντα Α από ό,τι Β.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(x > y) = \frac{3}{10}$$

Σωστή απάντηση η Γ.

### **ΑΣΚΗΣΗ 5**

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x) = (x + 4)(x + 6)(x + 8) \dots (x + 98)$$

Να βρεθεί ο μέσος όρος των ακέραιων τιμών  $x$  για τις οποίες  $f(x) < 0$ .

**A. -51**

**B. -57**

**Γ. -63**

**Δ. -71**

## ΛΥΣΗ

Οι ρίζες της συνάρτησης προκύπτουν από τις τιμές που μηδενίζουν κάθε παράγοντα:

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \quad x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6 \quad x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$$

... και συνεχίζουμε μέχρι:

$$x + 98 = 0 \Rightarrow x = -98$$

Άρα οι ρίζες είναι:

$$-98, -96, -94, \dots, -6, -4$$

Πρόκειται για αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο  $a_1 = -98$ , τελευταίο όρο  $a_n = -4$  και διαφορά  $d = 2$ .

Ο αριθμός όρων  $n$  δίνεται από τον τύπο της αριθμητικής προόδου:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{-4 - (-98)}{2} + 1 = \frac{94}{2} + 1 = 47 + 1 = 48$$

Άρα έχουμε 48 ρίζες.

Η πολυωνυμική συνάρτηση  $f(x)$  είναι άρτιου βαθμού (48) και έχει θετικό συντελεστή του αρχικού όρου.

- Για  $x > -4$ , όλοι οι παράγοντες είναι θετικοί, άρα  $f(x) > 0$ .
- Μεταξύ των ριζών, το πρόσημο εναλλάσσεται.

Επομένως, τα διαστήματα όπου  $f(x) < 0$  είναι:

$$(-98, -96), (-94, -92), (-90, -88), \dots, (-6, -4)$$

Οι ακέραιοι μέσα σε αυτά τα διαστήματα είναι:

$$-97, -93, -89, \dots, -5$$

Αποτελούν αριθμητική πρόοδο με:

- πρώτο όρο  $-97$
- τελευταίο όρο  $-5$
- διαφορά  $4$

Αριθμός όρων:

$$n = \frac{-5 - (-97)}{4} + 1 = \frac{92}{4} + 1 = 23 + 1 = 24$$

Ο μέσος όρος αριθμητικής προόδου δίνεται από:

$$\text{Μέσος όρος} = \frac{\text{πρώτος όρος} + \text{τελευταίος όρος}}{2} = \frac{-97 + (-5)}{2} = \frac{-102}{2} = -51$$

Σωστή απάντηση η Α.

### **ΑΣΚΗΣΗ 6**

Έστω  $A$  το σύνολο που περιλαμβάνει όλες τις ακέραιες λύσεις της μορφής  $(x, y, z)$  της εξίσωσης  $x - y - z = 2025$  όταν  $0 < x < 2.050$ ,  $0 < y < 150$ ,  $0 < z < 150$ . Η πιθανότητα να επιλέξουμε ως λύση μία τριάδα όπου  $y < 10$  είναι περίπου:

A. 48%

B. 53%

**Γ. 62%**

Δ. 71%

### **ΛΥΣΗ**

Από την εξίσωση:

$$x - y - z = 2.025 \Rightarrow x = 2.025 + y + z$$

Αφού  $x, y, z$  πρέπει να είναι ακέραιοι και να ικανοποιούν τους περιορισμούς:

- $0 < y < 150 \Rightarrow y \in \{1, 2, \dots, 149\}$
- $0 < z < 150 \Rightarrow z \in \{1, 2, \dots, 149\}$
- $0 < x < 2.050 \Rightarrow 0 < 2.025 + y + z < 2.050$

Άρα:

$$2.025 + y + z < 2.050 \Rightarrow y + z < 25$$

Επίσης, αφού  $y, z$  είναι θετικοί ακέραιοι, έχουμε:

$$1 \leq y \leq 149, 1 \leq z \leq 149, y + z < 25$$

Ας μετρήσουμε τα ζεύγη:

Για  $y = 1, z < 24 \rightarrow z = 1, 2, \dots, 23 \rightarrow 23$  τιμές

Για  $y = 2, z < 23 \rightarrow z = 1, \dots, 22 \rightarrow 22$  τιμές

Για  $y = 3, z < 22 \rightarrow 21$  τιμές

...

Για  $y = k, z < 25 - k \rightarrow z = 1, \dots, 24 - k \rightarrow 24 - k$  τιμές

Το  $y$  μπορεί να πάει μέχρι το 23, γιατί για  $y = 24, z < 1$  (που δεν είναι δυνατή η θετική τιμή για  $z$ ).

Άρα, το πλήθος των ζευγών είναι:

$$\sum_{y=1}^{23} (24 - y) = \sum_{y=1}^{23} 24 - \sum_{y=1}^{23} y = 23 \times 24 - \frac{23 \times 24}{2} = 552 - 276 = 276$$

Τώρα, θέλουμε τις λύσεις που έχουν  $y < 10$ , δηλαδή  $y \in \{1, 2, \dots, 9\}$  και πάλι  $y + z < 25$ .

Ομοίως, υπολογίζουμε:

$$\sum_{y=1}^9 (24 - y) = \sum_{y=1}^9 24 - \sum_{y=1}^9 y = 9 \times 24 - \frac{9 \times 10}{2} = 216 - 45 = 171$$

Άρα:

$$P = \frac{\text{Αριθμός λύσεων με } y < 10}{\text{Συνολικός αριθμός λύσεων}} = \frac{171}{276} = \frac{57}{92}$$

Περίπου 62%.

**Σωστή απάντηση η Γ.**

## ΑΣΚΗΣΗ 7

Σε ένα πρωτάθλημα ποδοσφαίρου, κάθε ομάδα έπαιζε ακριβώς ένα παιχνίδι εναντίον καθεμίας από τις άλλες ομάδες. Σε κάθε παιχνίδι, η νικήτρια ομάδα κέρδιζε 3 βαθμούς, η ηττημένη δεν έπαιρνε καθόλου βαθμούς και καθεμία από τις δύο ομάδες κέρδιζε από έναν βαθμό σε περίπτωση ισοπαλίας. Μετά την ολοκλήρωση του πρωταθλήματος, διαπιστώθηκε ότι ακριβώς το 75% των συνολικών βαθμών που κέρδισε καθεμία από τις συμμετέχουσες ομάδες κερδήθηκε σε παιχνίδια εναντίον των δέκα ομάδων με τον μικρότερο αριθμό βαθμών.

(Πιο αναλυτικά, καθεμία από τις δέκα ασθενέστερες ομάδες με τη χαμηλότερη βαθμολογία κέρδισε το 75% των συνολικών βαθμών της στα παιχνίδια εναντίον των άλλων εννέα από τις δέκα. Το ίδιο ποσοστό βαθμών, 75%, κέρδισε καθεμία από τις δυνατές ομάδες στα παιχνίδια εναντίον των δέκα ασθενέστερων ομάδων και το 25% των συνολικών βαθμών της το κέρδισε στα παιχνίδια με όλες τις υπόλοιπες δυνατές ομάδες.)

Υποθέτουμε επίσης ότι, από τα παιχνίδια που διεξήχθησαν α) μεταξύ όλων των ομάδων, β) μεταξύ των δυνατών ομάδων και γ) μεταξύ των ασθενέστερων ομάδων, το 60% κατέληξε σε νίκη και το 40% σε ισοπαλία. Ο συνολικός αριθμός ομάδων στο πρωτάθλημα ήταν:

A. 14

**B. 16**

Γ. 18

Δ. 20

## ΛΥΣΗ

Ας υποθέσουμε ότι συνολικά  $n$  ομάδες συμμετείχαν στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου. Για τους βαθμούς που συγκέντρωσαν θα δημιουργήσουμε δύο εκφράσεις σε  $n$ : μία λαμβάνοντας υπόψη τον συνολικό αριθμό βαθμών που συγκέντρωσαν όλες οι ομάδες, και μία λαμβάνοντας υπόψη τον αριθμό βαθμών που συγκέντρωσαν ξεχωριστά οι 10 πιο αδύνατες ομάδες (10 συμμετέχουσες με τη χαμηλότερη βαθμολογία) και αυτούς που συγκέντρωσαν οι πιο δυνατές (υπόλοιπες  $n - 10$  συμμετέχουσες).

Για να λάβουμε τις επιθυμητές εκφράσεις, θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι εάν οι  $v$  ομάδες έπαιξαν η μία εναντίον της άλλης, τότε έπαιξαν συνολικά  $v \cdot (v - 1) / 2$  παιχνίδια, εκ των οποίων το 60% έχει νικητή και δίνει 3 βαθμούς στη νικήτρια και το 40% καταλήγει σε ισοπαλία και δίνει από 1 βαθμό στις δύο ισόπαλες ομάδες, με αποτέλεσμα ένα άθροισμα:

$$3 \cdot (0,6) \cdot v(v - 1) / 2 + 2 \cdot (0,4) \cdot v(v - 1) / 2 = (1,3) \cdot v(v - 1) \text{ βαθμών που θα συγκεντρώσουν συνολικά [Σχ.1]}$$

Οι 10 πιο αδύνατες ομάδες έδωσαν μεταξύ τους  $10 \cdot (10 - 1) / 2 = 45$  παιχνίδια, εκ των οποίων το 60%  $[(0,6) \cdot 45 = 27$  παιχνίδια] κατέληξαν σε νίκη και συγκεντρώθηκαν  $27 \cdot 3 = 81$  βαθμοί, και το υπόλοιπο 40%  $[(0,4) \cdot 45 = 18$  παιχνίδια] έληξαν ισοπαλία και συγκεντρώθηκαν  $18 \cdot 2 = 36$  βαθμοί, δηλαδή συγκεντρώθηκαν στα 45 παιχνίδια μεταξύ των 10 αδύνατων ομάδων συνολικά:  $81 + 36 = 117$  ή  $3 \cdot 39 = 3 \cdot (1,3) \cdot 30$  βαθμοί.

Ομοίως, οι  $v - 10$  πιο δυνατές ομάδες έδωσαν  $(v - 10)(v - 11) / 2$  παιχνίδια μεταξύ τους, εκ των οποίων το 60% έχει νικητή και δίνει 3 βαθμούς στη νικήτρια και το 40% καταλήγει σε ισοπαλία και δίνει από 1 βαθμό στις δύο ισόπαλες ομάδες, με αποτέλεσμα ένα άθροισμα:

$$3 \cdot (0,6) \cdot (v - 10)(v - 11) / 2 + 2 \cdot (0,4) \cdot (v - 10)(v - 11) / 2 = (1,3) \cdot (v - 10)(v - 11) \text{ βαθμών που θα συγκεντρώσουν οι } v - 10 \text{ δυνατές ομάδες στα μεταξύ τους παιχνίδια.}$$

Επιπροσθέτως, οι 10 αδύνατες ομάδες θα διασταυρωθούν με τις  $v - 10$  δυνατές ομάδες σε  $10 \cdot (v - 10)$  παιχνίδια και βάσει της υπόθεσης ότι κάθε ομάδα συγκεντρώνει τα  $\frac{3}{4} = 75\%$  των βαθμών της εναντίον των δέκα αδύνατων ομάδων με τον μικρότερο αριθμό βαθμών προκύπτει ότι:

- οι δυνατές ομάδες στους αγώνες τους με τις 10 αδύνατες κερδίζουν επιπλέον  $3 \cdot (1,3) \cdot (v - 10)(v - 11)$  βαθμούς
- οι αδύνατες ομάδες στους αγώνες τους με τις  $v - 10$  δυνατές κερδίζουν επιπλέον  $(1/3) \cdot 117 = (1/3) \cdot 3 \cdot 39 = 39 = (1,3) \cdot 30$  βαθμούς

Συνολικά οι δυνατές και οι αδύνατες ομάδες συγκεντρώνουν στο σύνολο όλων των παιχνιδιών:  $4 \cdot (1,3) \cdot (v - 10)(v - 11) + 4 \cdot (1,3) \cdot 30$  βαθμούς [Σχ.2].

Από τις [Σχ.1] & [Σχ.2] καταρτίζουμε την εξίσωση:  $(1,3) \cdot v(v - 1) = 4 \cdot (1,3) \cdot (v - 10)(v - 11) + 4 \cdot (1,3) \cdot 30$   
 $\Leftrightarrow v(v - 1) = 4 \cdot (v - 10)(v - 11) + 4 \cdot 30$ , η οποία ισοδυναμεί με  $3 \cdot v^2 - 83 \cdot v + 560 = 0$ .

Η δευτεροβάθμια αυτή εξίσωση έχει δύο λύσεις:  $v = 16$  και  $v = 35/3 = 11,667$

Κρατάμε την 1η λύση, που είναι ακέραια, δηλαδή  $v = 16$  συμμετέχουσες ομάδες στο πρωτάθλημα.

Επαλήθευση ότι υπάρχει τέτοιο πρωτάθλημα:

Εφόσον  $v = 16$ , διακρίνουμε τις συμμετέχουσες ομάδες σε 6 δυνατές ομάδες και 10 αδύνατες.

Οι ομάδες παίζουν συνολικά  $16 \cdot (16 - 1)/2 = 120$  παιχνίδια, από τα οποία οι δυνατές δίνουν μεταξύ τους  $6 \cdot (6 - 1)/2 = 15$  παιχνίδια, οι 10 αδύνατες δίνουν  $10 \cdot (10 - 1)/2 = 45$  παιχνίδια και τα υπόλοιπα  $10 \cdot (16 - 10) = 60$  δίνονται μεταξύ δυνατών και αδύνατων ομάδων.

Βάσει υπόθεσης, το 60% των παιχνιδιών καταλήγει σε νίκη μίας εκ των δύο ομάδων, ενώ στο 40% των παιχνιδιών σημειώνεται ισοπαλία, οπότε:

- στα 15 παιχνίδια ανάμεσα στις δυνατές σημειώνονται 9 νίκες και 6 ισοπαλίες (συγκεντρώνονται συνολικά  $9 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 39$  βαθμοί σε αυτά τα 15 παιχνίδια)
- στα 45 παιχνίδια ανάμεσα στις αδύνατες σημειώνονται 27 νίκες και 18 ισοπαλίες (συγκεντρώνονται συνολικά  $27 \cdot 3 + 18 \cdot 2 = 117$  βαθμοί σε αυτά τα 45 παιχνίδια)
- στα 60 παιχνίδια μεταξύ δυνατών και αδύνατων σημειώνονται 36 νίκες και 24 ισοπαλίες (συγκεντρώνονται συνολικά  $36 \cdot 3 + 24 \cdot 2 = 156$  βαθμοί σε αυτά τα 60 παιχνίδια, από τους οποίους οι δυνατές ομάδες συγκεντρώνουν επιπλέον  $3 \cdot 39 = 117$  –τριπλάσιους δηλαδή παίζοντας με αδύνατες–, και οι αδύνατες συγκεντρώνουν επιπλέον  $(1/3) \cdot 117 = 39$  παίζοντας με δυνατές)

Επομένως, όλες οι ομάδες (δυνατές και αδύνατες) συγκεντρώνουν ακριβώς το 75% των συνολικών βαθμών τους παίζοντας με τις 10 πιο αδύνατες ομάδες, που συγκέντρωσαν δηλαδή τη χαμηλότερη βαθμολογία, όπως απαιτείται από το πρόβλημα.

**Σωστή απάντηση η Β.**

## ΑΣΚΗΣΗ 8

Μια στατιστική έρευνα για τους μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης της υπαίθρου πραγματοποιήθηκε σε έναν αριθμό χωριών μιας χώρας που εκτείνονταν σε τρεις γεωγραφικές περιοχές, τη Βορειοανατολική (BA), τη Δυτική (Δ) και τη Νότια (N). Από τα 150 χωριά της BA περιοχής, τα 250 χωριά της Δ και τα 200 χωριά της N περιοχής επιλέχθηκαν δείγματα 50 παιδιών ηλικίας από 6 έως 10 ετών.

Διαπιστώθηκε ότι από τα 30.000 παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα, το 55% αυτών φοιτούσε σε δημόσια δημοτικά σχολεία (Δ), το 37% σε ιδιωτικά σχολεία (Ι), ενώ το υπόλοιπο 8% δεν πήγαινε καθόλου σχολείο (Ο).

Τα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα χωρίστηκαν περαιτέρω σε δύο ομάδες, με βάση το αν οι μητέρες τους εγκατέλειψαν το σχολείο πριν ολοκληρώσουν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση ή όχι. Ο παρακάτω πίνακας μας παρουσιάζει τον αριθμό των παιδιών στους τρεις διαφορετικούς τύπους σχολείων για την περίπτωση που οι μητέρες τους εγκατέλειψαν το σχολείο πριν ολοκληρώσουν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση:

	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
BA	4.200	500	300	5.000
Δ	4.200	1.900	1.200	7.300
N	5.100	300	300	5.700
Σύνολο	13.500	2.700	1.800	18.000

Είναι επίσης γνωστό ότι:

1. Στη Νότια περιοχή (N), το 60% των παιδιών που συμμετείχαν στην έρευνα φοιτούσε σε δημόσια σχολεία (Δ). Επιπλέον, στη Νότια περιοχή (N), όλα τα παιδιά των οποίων οι μητέρες είχαν ολοκληρώσει την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, φοιτούσαν σε κάποιο σχολείο.
2. Στη Βορειοανατολική περιοχή (BA), μεταξύ των παιδιών που δεν πήγαιναν σχολείο (Ο), το 50% είχε μητέρες που είχαν εγκαταλείψει το σχολείο πριν ολοκληρώσουν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση.

3. Ο αριθμός των παιδιών σε δημόσια σχολεία (Δ) στη ΒΑ περιοχή ήταν ίσος με τον αριθμό των παιδιών σε δημόσια σχολεία (Δ) στη Δυτική περιοχή (Δ).

Σε μια επαναληπτική έρευνα στα ίδια παιδιά, δύο χρόνια αργότερα, διαπιστώθηκε ότι πλέον όλα τα παιδιά φοιτούσαν σε κάποιο σχολείο. Από τα παιδιά που προηγουμένως δεν πήγαιναν σχολείο, σε μία περιοχή το 25% αυτών φοιτούσε τώρα σε δημόσιο σχολείο (Δ), ενώ τα υπόλοιπα είχαν εγγραφεί σε ιδιωτικό σχολείο (Ι). Στη δεύτερη περιοχή, όλα αυτά τα παιδιά φοιτούσαν τώρα σε δημόσιο σχολείο (Δ). Στην τρίτη περιοχή, το 50% αυτών των παιδιών είχε εγγραφεί τώρα σε δημόσιο σχολείο (Δ), ενώ τα υπόλοιπα σε ιδιωτικό σχολείο (Ι).

Ως αποτέλεσμα, και στις τρεις περιοχές συνολικά, το 50% των παιδιών που προηγουμένως δεν πήγαιναν σχολείο είχε πλέον εγγραφεί σε δημόσιο σχολείο (Δ). Επίσης, παρατηρήθηκε ότι κανένα από τα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα δεν είχε αλλάξει σχολείο.

Η πιθανότητα να επιλέξουμε μαθητή της Νότιας περιοχής (Ν), του οποίου η μητέρα είχε εγκαταλείψει το σχολείο πριν ολοκληρώσει την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, και τώρα το παιδί φοιτά σε δημόσιο σχολείο (Δ) είναι:

A. 89,3%

B. 91,7%

Γ. 92,1%

**Δ. 94,7%**

### **ΛΥΣΗ**

Γνωρίζουμε την κατανομή των παιδιών σε Δ Σχολεία, Ι Σχολεία και στην ομάδα Ο για τις μητέρες που εγκατέλειψαν το σχολείο πριν ολοκληρώσουν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Αν μπορέσουμε να συμπληρώσουμε έναν παρόμοιο πίνακα για τις μητέρες που ολοκλήρωσαν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, αυτό θα ήταν πολύ χρήσιμο. Γνωρίζουμε τους συνολικούς αριθμούς και έτσι μπορούμε να συμπληρώσουμε τα κενά.

Γνωρίζουμε ότι:

Μητέρες που εγκατέλειψαν	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
ΒΑ	4.200	500	300	5.000
Δ	4.200	1.900	1.200	7.300
Ν	5.100	300	300	5.700
Σύνολο	13.500	2.700	1.800	18.000

Ο συνολικός πίνακας θα είναι:

Συνολικός Πίνακας	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
ΒΑ				7.500
Δ				12.500
Ν				10.000
Σύνολο	16.500	11.100	2.400	30.000

Τώρα μπορούμε να δημιουργήσουμε τον παρακάτω πίνακα:

Μητέρες που ολοκλήρωσαν	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
ΒΑ				2.500
Δ				5.200
Ν				4.300
Σύνολο	3.000	8.400	600	12.000

Στη Νότια περιοχή (Ν), συνολικά 6.000 μαθητές φοιτούσαν σε δημόσια σχολεία (Δ). Από αυτούς, οι 5.100 είναι από μητέρες που είχαν εγκαταλείψει το σχολείο. Άρα, οι μαθητές σε δημόσια σχολεία με μητέρες που ολοκλήρωσαν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση θα πρέπει να είναι 900. Και η ομάδα «Δεν πηγαίνουν σχολείο» (Ο) στον πίνακα θα πρέπει να είναι 0. Άρα:

Μητέρες που ολοκλήρωσαν	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
ΒΑ				2.500
Δ				5.200
Ν	900	3.400	0	4.300
Σύνολο	3.000	8.400	600	12.000

Το πεδίο ΒΑ-Ο θα πρέπει να είναι ίδιο και στους πίνακες «Μητέρα που εγκατέλειψε» και «Μητέρα που ολοκλήρωσε». Δηλαδή, το ΒΑ-Ο στον πίνακα θα πρέπει να είναι 300. Αυτό μας δίνει επίσης την τιμή για το Δ-Ο στον πίνακα.

Μητέρες που ολοκλήρωσαν	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
ΒΑ			300	2.500
Δ			300	5.200
Ν	900	3.400	0	4.300
Σύνολο	3.000	8.400	600	12.000

Το Δ στη Βορειοανατολική (ΒΑ) και το Δ στη Δυτική (Δ) περιοχή, και στις δύο περιπτώσεις για τις μητέρες που εγκατέλειψαν το σχολείο, είναι 4.200 η καθεμία. Επομένως, το Δ στη ΒΑ και το Δ στη Δ περιοχή θα πρέπει επίσης να είναι ίσα μεταξύ τους. Αυτά τα δύο κελιά θα πρέπει να είναι 1.050.

Άρα:

Μητέρες που ολοκλήρωσαν	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
ΒΑ	1.050		300	2.500
Δ	1.050		300	5.200
Ν	900	3.400	0	4.300
Σύνολο	3.000	8.400	600	12.000

Συνεπώς:

Μητέρες που ολοκλήρωσαν	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
ΒΑ	1.050	1.150	300	2.500
Δ	1.050	3.850	300	5.200
Ν	900	3.400	0	4.300
Σύνολο	3.000	8.400	600	12.000

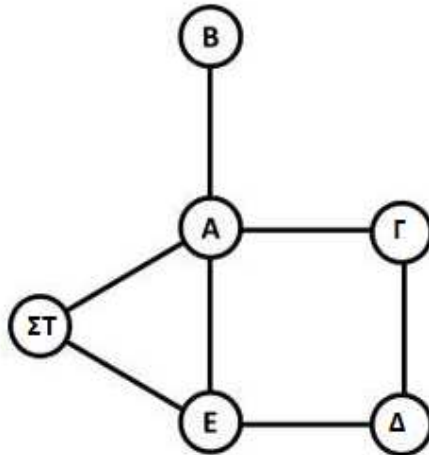
Άρα, τα 300 παιδιά που ήταν στην ομάδα Ο αρχικά, τώρα έχουν μετακινηθεί στο Δ. Δηλαδή, το Δ τώρα ανέρχεται σε 5.400.

Το ζητούμενο ποσοστό είναι  $5.400/5.700 \times 100 = 94,7\%$ .

**Σωστή απάντηση η Δ.**

### ΑΣΚΗΣΗ 9

A, B, Γ, Δ, E και ΣΤ είναι έξι Αστυνομικά Τμήματα σε μια περιοχή, τα οποία συνδέονται με δρόμους όπως φαίνεται παρακάτω. Τέσσερις ομάδες –Ομάδα 1, Ομάδα 2, Ομάδα 3 και Ομάδα 4– περιπολούν συνεχώς στους δρόμους αυτούς από τις 09:00 το πρωί έως τις 12:00 το μεσημέρι κάθε μέρα.



Οι ομάδες χρειάζονται 30 λεπτά για να διασχίσουν έναν δρόμο που συνδέει ένα Αστυνομικό Τμήμα με ένα άλλο. Και οι τέσσερις ομάδες ξεκινούν από το Τμήμα A στις 09:00 και πρέπει να επιστρέψουν στο Τμήμα A έως τις 12:00. Μπορούν επίσης να περάσουν από το Τμήμα A οποιαδήποτε στιγμή κατά τη διάρκεια της διαδρομής τους.

Γνωρίζουμε τα εξής:

1. Κανένας δρόμος δεν διασχίζεται από περισσότερες από μία ομάδες προς οποιαδήποτε κατεύθυνση την ίδια χρονική στιγμή.
2. Οι Ομάδες 2 και 3 είναι οι μόνες που βρίσκονται στα Τμήματα E και Δ, αντίστοιχα, στις 10:00.
3. Οι Ομάδες 1 και 3 είναι οι μόνες που βρίσκονται στο Τμήμα E στις 10:30.
4. Οι Ομάδες 1 και 4 είναι οι μόνες που βρίσκονται στα Τμήματα B και E, αντίστοιχα, στις 11:30.
5. Οι Ομάδες 1 και 4 είναι οι μόνες ομάδες που περιπολούν τον δρόμο που συνδέει τα Τμήματα A και E.
6. Η Ομάδα 4 δεν περνάει ποτέ από τα Τμήματα B, Δ ή ΣΤ.

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα, η πιθανότητα να περάσουν από το Τμήμα Γ δύο ομάδες περιπολίας είναι:

A. 25%

B. 50%

Γ. 75%

**Δ. 100%**

### ΛΥΣΗ

Ας προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε βήμα-βήμα τα δεδομένα του προβλήματος.

Δεδομένου ότι τέσσερις ομάδες –Ομάδα 1, Ομάδα 2, Ομάδα 3 και Ομάδα 4– περιπολούν συνεχώς στους δρόμους αυτούς από τις 09:00 το πρωί έως τις 12:00 το μεσημέρι, αντιλαμβανόμαστε ότι κάθε ομάδα θα πρέπει να πραγματοποιήσει 6 περιπολίες των 30 λεπτών η καθεμία ξεκινώντας από το Τμήμα Α.

Οι ομάδες 2 και 3 είναι οι ομάδες που βρίσκονται στα Τμήματα Ε και Δ, αντίστοιχα, στις 10.00 το πρωί. Αυτές οι δύο ομάδες έφτασαν εκεί ακολουθώντας τις διαδρομές:

Η 2 τη διαδρομή  $A \rightarrow \Sigma\Gamma \rightarrow E$  και η 3 τη διαδρομή  $A \rightarrow E \rightarrow \Delta$  ή  $A \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta$ . Δεδομένου όμως ότι οι ομάδες 1 και 4 περιπολούν τη διαδρομή ΑΕ, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τελικά η ομάδα 2 έκανε τη διαδρομή  $A \rightarrow \Sigma\Gamma \rightarrow E$  και η ομάδα 3 έκανε τη διαδρομή  $A \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta$ . Έχουμε επομένως τον παρακάτω πίνακα:

	9:00 π.μ.	9:30 π.μ.	10:00 π.μ.	10:30 π.μ.	11:00 π.μ.	11:30 π.μ.	12:00
<b>Ομάδα 1</b>	A						A
<b>Ομάδα 2</b>	A	ΣΤ	E				A
<b>Ομάδα 3</b>	A	Γ	Δ				A
<b>Ομάδα 4</b>	A						A

Από τον συνδυασμό των δεδομένων 3 και 4, ο πίνακάς μας γίνεται:

	9:00 π.μ.	9:30 π.μ.	10:00 π.μ.	10:30 π.μ.	11:00 π.μ.	11:30 π.μ.	12:00
<b>Ομάδα 1</b>	A			E		B	A
<b>Ομάδα 2</b>	A	ΣΤ	E				A
<b>Ομάδα 3</b>	A	Γ	Δ	E			A
<b>Ομάδα 4</b>	A					E	A

Με το δεδομένο 6 η ομάδα 4 περιπολεί μόνο μεταξύ  $A \rightarrow \Gamma$  και  $A \rightarrow E$  και με βάση το δεδομένο 1 ο πίνακας γίνεται:

	9:00 π.μ.	9:30 π.μ.	10:00 π.μ.	10:30 π.μ.	11:00 π.μ.	11:30 π.μ.	12:00
<b>Ομάδα 1</b>	A	B	A	E	A	B	A
<b>Ομάδα 2</b>	A	ΣΤ	E	ΣΤ			A
<b>Ομάδα 3</b>	A	Γ	Δ	E			A
<b>Ομάδα 4</b>	A	E	A	Γ	A	E	A

Αν τώρα αξιοποιήσουμε το δεδομένο 1 σε συνδυασμό με τα δεδομένα του πίνακα, τελικά ο πίνακας συμπληρώνεται πλήρως ως εξής:

	9:00 π.μ.	9:30 π.μ.	10:00 π.μ.	10:30 π.μ.	11:00 π.μ.	11:30 π.μ.	12:00
Ομάδα 1	A	B	A	E	A	B	A
Ομάδα 2	A	ΣΤ	E	ΣΤ	A/E	ΣΤ	A
Ομάδα 3	A	Γ	Δ	E	Δ	Γ	A
Ομάδα 4	A	E	A	Γ	A	E	A

Από τον πίνακα διακρίνουμε ότι 2 ομάδες από τις 4 πέρασαν από το Τμήμα Γ.

**Σωστή απάντηση η Δ.**

### **ΑΣΚΗΣΗ 10**

Το Τμήμα Ανάλυσης Δεδομένων μιας μεγάλης πολυεθνικής εταιρείας συνέλεξε και ανέλυσε τα δεδομένα 200 εταιρειών από την περσινή διαφημιστική τους καμπάνια προκειμένου να προτείνει στο Τμήμα Μάρκετινγκ τη διαφημιστική πολιτική του επόμενου έτους. Συγκεκριμένα, μελέτησε τα

ετήσια συνολικά ποσά των πωλήσεων (σε χιλιάδες ευρώ) διαφόρων εταιρειών, και τα συνολικά ποσά που ξόδεψαν οι εταιρείες αυτές (σε χιλιάδες ευρώ) για τις διαφημιστικές τους καμπάνιες στην τηλεόραση, στο ραδιόφωνο και στις εφημερίδες. Ο παρακάτω πίνακας μας παρουσιάζει τα περιγραφικά στοιχεία που προέκυψαν από την ανάλυση των ποσών, σε χιλιάδες ευρώ, που δαπανήθηκαν από τις εταιρείες για κάθε είδος διαφημιστικής καμπάνιας, καθώς και των πωλήσεων που οι εταιρείες πραγματοποίησαν.

**ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ**

	Τηλεόραση	Ραδιόφωνο	Εφημερίδες	Πωλήσεις
Τυπική απόκλιση	85,85424	14,84681	21,77862	5,28389
Ελάχιστη τιμή	0,70	0,00	0,30	1,60
Μέγιστη τιμή	296,40	49,60	114,00	27,00
Άθροισμα	29.408,50	4.652,80	6.110,10	3.026,10

Επίσης, ο παρακάτω πίνακας μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα των γραμμικών συσχετίσεων μεταξύ των συνολικών πωλήσεων των εταιρειών και του είδους της διαφημιστικής δαπάνης που πραγματοποίησαν.

**ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ PEARSON ( r )**

	Τηλεόραση	Ραδιόφωνο	Εφημερίδες
Πωλήσεις	0,901	0,350	0,158

Η απόφαση του Τμήματος Μάρκετινγκ είναι να χρησιμοποιήσει το μέγιστο δυνατό ποσό βάσει των παραπάνω πινάκων με τον πιο αποδοτικό τρόπο. Εάν η πολυεθνική εταιρεία ακολουθήσει αυτήν την πολιτική, οι πωλήσεις της το επόμενο έτος αναμένεται να ανέλθουν περίπου σε:

- A. 23.427 ευρώ
- B. 21.315 ευρώ
- Γ. 22.753 ευρώ
- Δ. 24.617 ευρώ

## ΛΥΣΗ

Δύο είναι τα βασικά ερωτήματα τα οποία θα πρέπει να απαντηθούν.

1. Ποιο είναι το ποσό που θα πρέπει να δαπανηθεί στη διαφημιστική καμπάνια της πολυεθνικής εταιρείας και πώς αυτό θα πρέπει να διανεμηθεί μεταξύ Τηλεόρασης, Ραδιοφώνου και Εφημερίδων.
2. Βάσει ποιου μαθηματικού μοντέλου θα γίνει η παραπάνω πρόβλεψη.

Παρατηρώντας προσεκτικά τον πίνακα των συσχετίσεων διακρίνουμε ότι οι συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών Πωλήσεις - Τηλεόραση, Πωλήσεις - Ραδιόφωνο και Πωλήσεις - Εφημερίδες είναι 0,901, 0,350 και 0,158 αντίστοιχα, τιμές που μας βοηθούν να καταλήξουμε στη διαπίστωση ότι υπάρχει μια πολύ ισχυρή γραμμική συσχέτιση μεταξύ των αριθμό των πωλήσεων και της τηλεοπτικής διαφημιστικής καμπάνιας, γεγονός που ισχυροποιεί το γεγονός ότι για να πετύχει η εταιρεία το μέγιστο αριθμό πωλήσεων θα πρέπει να προχωρήσει σε τηλεοπτική διαφημιστική καμπάνια. Συνεπώς, η καλύτερη πολιτική είναι να θεωρήσουμε με βάση τα δεδομένα μας ένα μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης με εξαρτημένη μεταβλητή τις πωλήσεις και ανεξάρτητη μεταβλητή την Τηλεόραση. Η ευθεία της γραμμικής παλινδρόμησης θα είναι της μορφής:

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$$

Γνωρίζουμε όμως ότι ασφαλείς προβλέψεις μπορεί να γίνουν μόνο για τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής που βρίσκονται εντός του διαστήματος δημιουργίας του μοντέλου μας. Αυτό σημαίνει ότι το μεγαλύτερο ποσό που μπορεί να διαθέσει ασφαλώς η εταιρεία είναι 296.400 ευρώ και το ελάχιστο ποσό 700 ευρώ για την τηλεοπτική της διαφημιστική της καμπάνια.

Για τον υπολογισμό του μοντέλου μας ακολουθούμε την εξής διαδικασία.

Γνωρίζουμε ότι:

$$r = \hat{\beta} \frac{s_x}{s_y}.$$

Από τον πίνακα των περιγραφικών στοιχείων έχουμε ότι:

$s_y = 5,28389$ ,  $s_x = 85,85424$  και  $r = 0,901$ . Άρα,  $\hat{\beta} = [(0,901)*(5,28389)]/85,85424 = 0,0555$

και

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$$

δηλ.  $\hat{\alpha} = (3.026,10/200) - 0,055 * (29.408,50/200) = 6,977$

Συνεπώς, η ευθεία της γραμμικής παλινδρόμησης θα είναι η:

$$\text{Πωλήσεις} = 6,977 + 0.0555 * \text{Τηλεόραση}.$$

Με βάση το παραπάνω μοντέλο, εάν η εταιρεία ξοδέψει 296.400 ευρώ για διαφημιστική καμπάνια στην τηλεόραση, τότε οι πωλήσεις της αναμένονται να είναι:  $6,977 + 0,0555 * (296,40) = 23,427$ , δηλ. περίπου 23.427 ευρώ.

**Σωστή απάντηση η Α.**

## ΕΚΔΟΧΗ 2

### ΑΣΚΗΣΗ 1

Έχουμε το παρακάτω σύνολο ακέραιων δεδομένων, όχι κατά ανάγκη μοναδικών, που μας δίνουν τους βαθμούς των μαθητών μίας τάξης Λυκείου σε ένα διαγώνισμα (κλίμακα βαθμολογίας 0 - 100). Οι βαθμοί των μαθητών είναι τοποθετημένοι σε αύξουσα σειρά.

10, 11, 15, 18, x, x, x, x, γ, γ, γ, 33

Γνωρίζουμε ότι:

A. Η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων είναι μοναδική και ίση με τη διάμεσο.

B. Η επικρατούσα τιμή είναι ίση με τη μέση βαθμολογία των μαθητών αλλά μικρότερη του γ.

Ο καθηγητής της τάξης, μελετώντας τη βαθμολογία των μαθητών του, παρατήρησε ότι αυτή ήταν η χαμηλότερη δυνατή. Σκέφτηκε επομένως να πριμοδοτήσει όλους τους μαθητές του με τον μικρότερο δυνατό θετικό ακέραιο αριθμό, προκειμένου οι τελικοί βαθμοί των μαθητών του να είναι ομοιογενείς. Ο ελάχιστος αυτός αριθμός που θα πρέπει να προστεθεί στους αρχικούς βαθμούς είναι:

A. 34

B. 37

Γ. 41

Δ. 45

### ΛΥΣΗ

Έχουμε το σύνολο των ακέραιων δεδομένων:

$$10, 11, 15, 18, x, x, x, x, y, y, y, 33$$

δηλ. 12 παρατηρήσεις συνολικά.

Η διάμεσος είναι ο μέσος όρος της 6ης και της 7ης τιμής:

$$\text{Διάμεσος} = \frac{(6\eta + 7\eta)}{2}$$

Η 6η και η 7η παρατήρηση είναι και οι δύο  $x$ , άρα:

$$\text{Διάμεσος} = x$$

Επίσης, η μόνη τιμή που επαναλαμβάνεται περισσότερο και μοναδικά είναι η  $x$ .

Άρα η επικρατούσα είναι  $x$ . Συνεπώς, Επικρατούσα = Διάμεσος =  $x$

Από τη δεύτερη συνθήκη όμως γνωρίζουμε ότι:  $x = \text{Μέσος όρος} < y$

Ο μέσος όρος θα είναι:

$$\mu = \frac{87 + 4x + 3y}{12}$$

Η συνθήκη δίνει:

$$x = \mu = \frac{87 + 4x + 3y}{12}$$

και συνεπώς:  $y = \frac{8x-87}{3}$ . Όμως,  $x < y$ . Άρα:

$x < \frac{8x-87}{3} \Rightarrow 3x < 8x - 87 \Rightarrow 87 < 5x \Rightarrow x > 17,4$ . Επειδή οι παρατηρήσεις είναι ακέραιες, ισχύει ότι:

$x \geq 18$ . Οι δύο δυνατές περιπτώσεις που επαληθεύουν τα δεδομένα του προβλήματος είναι:

1.  $x = 18$  και  $y = 19$

2.  $x = 21$  και  $y = 27$

Δεδομένου όμως ότι η βαθμολογία των μαθητών ήταν η μικρότερη δυνατή, απορρίπτουμε τη δεύτερη περίπτωση. Συνεπώς, η αρχικοί βαθμοί των μαθητών ήταν οι:

10, 11, 15, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 19, 19, 33. Η μέση τιμή αυτών είναι:  $\mu = 18$ .

Για να βρούμε την τυπική απόκλιση, δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα:

Παρατηρήσεις ( $x_i$ )	$(x_i - \mu)$	$(x_i - \mu)^2$
10	-8	64
11	-7	49
15	-3	9
18	0	0
18	0	0
18	0	0
18	0	0
18	0	0
19	+1	1
19	+1	1
19	+1	1
33	+15	225

Άρα:

$$\text{Διακύμανση (πληθυσμού)} = \sigma^2 = \frac{350}{12} = 29,1667 \Rightarrow \sigma = \sqrt{29,1667} = 5,4$$

με  $CV = \frac{5,4}{18} \times 100\% = 30\%$ , πολύ πιο πάνω από 10% που χρειαζόμαστε.

Αν προσθέσουμε σε κάθε παρατήρηση έναν σταθερό ακέραιο αριθμό  $k$ , τότε:

- Ο μέσος γίνεται  $\mu' = \mu + k$
- Η τυπική απόκλιση δεν αλλάζει

Άρα:

$$CV' = \frac{s}{\mu + k} \times 100\%$$

Θέλουμε:

$$CV' < 10\%$$

Επομένως:

$$\frac{5,4}{18+k} \times 100 < 10 \Rightarrow \frac{5,4}{18+k} < 0,1 \Rightarrow k > 36. \text{ Άρα ο ελάχιστος ζητούμενος ακέραιος είναι ο } k = 37.$$

**Σωστή απάντηση η Β.**

## **ΑΣΚΗΣΗ 2**

Πόσα διαφορετικά ορθογώνια παραλληλόγραμμα κάθε διάστασης μπορούμε να επιλέξουμε σε μια σκακιέρα 8x8, εξαιρουμένων όλων των τετραγώνων οποιουδήποτε μεγέθους, αφαιρώντας δηλαδή τον αριθμό των ορθογωνίων, στα οποία συμπίπτει το πλάτος με το ύψος;

**A. 997**

**B. 1.012**

**Γ. 1.092**

**Δ. 1.108**

## ΛΥΣΗ

A. Υπολογισμός του συνολικού δυνατού αριθμού διαφορετικών ορθογωνίων παραλληλογράμμων:

Σε μια σκακιέρα που αποτελείται από  $8 \times 8$  τετράγωνα, υπάρχουν 9 οριζόντιες γραμμές και 9 κάθετες γραμμές. Κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο καθορίζεται επιλέγοντας 2 οριζόντιες γραμμές και 2 κάθετες γραμμές.

Ο αριθμός των τρόπων επιλογής 2 οριζόντιων γραμμών από τις 9 δίνεται από τον τύπο των συνδυασμών:  $= 9(9-1)/2 = 36$

Ο αριθμός των τρόπων επιλογής 2 κάθετων γραμμών από τις 9 δίνεται επίσης από τον τύπο των συνδυασμών:  $= 9(9-1)/2 = 36$

Εφαρμόζοντας την πολλαπλασιαστική αρχή, το σύνολο των διαφορετικών ορθογωνίων που μπορούμε να επιλέξουμε είναι:  $= 36 \times 36 = 1.296$ .

B. Υπολογισμός του συνολικού δυνατού αριθμού διαφορετικών τετραγώνων οποιασδήποτε διάστασης από  $1 \times 1$  έως  $8 \times 8$ :

Τετράγωνα με διάσταση πλευράς  $k$  (όπου  $k=1,2,\dots,8$ ) μπορούν να επιλεγούν κατά  $(8 - k + 1)^2$  τρόπους, οπότε για  $k=1,2,\dots,8$  υπολογίζουμε τον αριθμό των διαφορετικών τετραγώνων ως ακολούθως:

$1 \times 1$  τετράγωνα:  $8 \times 8 = 64$

$2 \times 2$  τετράγωνα:  $7 \times 7 = 49$

$3 \times 3$  τετράγωνα:  $6 \times 6 = 36$

$4 \times 4$  τετράγωνα:  $5 \times 5 = 25$

$5 \times 5$  τετράγωνα:  $4 \times 4 = 16$

$6 \times 6$  τετράγωνα:  $3 \times 3 = 9$

$7 \times 7$  τετράγωνα:  $2 \times 2 = 4$

$8 \times 8$  τετράγωνα:  $1 \times 1 = 1$

με το άθροισμα όλων των διαφορετικών τετραγώνων να ανέρχεται σε  $64+49+36+25+16+9+4+1=204$ .

Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός διαφορετικών ορθογωνίων σε σκακιέρα  $8 \times 8$ , εξαιρώντας τα τετράγωνα, είναι:  $1296 - 204 = 1.092$ .

**Σωστή απάντηση η Γ.**

### ΑΣΚΗΣΗ 3

Έστω μία μεταβλητή της οποίας οι παρατηρήσεις  $x_i$  ακολουθούν την κανονική κατανομή, με το 2,5% των παρατηρήσεων της μεταβλητής να είναι μεγαλύτερες του 21 και το 16% μικρότερες του 12.

Εάν γνωρίζουμε ότι  $(\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i) = 2.574$ , το μέγεθος του δείγματος είναι:

A. 11

B. 15

Γ. 19

Δ. 23

### ΛΥΣΗ

Αφού το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες του 21, ισχύει:  $\bar{x} + 2s = 21$  (1)

Επίσης, αφού το 16% είναι μικρότερες του 12, ισχύει:  $\bar{x} - s = 12$  (2)

Αφαιρώντας τη (2) από την (1), έχουμε:  $3s = 9 \Leftrightarrow s = 3$ , οπότε και  $\bar{x} = 12 + s = 15$ .

$$\text{Εφόσον: } s^2 = \frac{1}{v} \left[ \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{(\sum_{i=1}^k x_i v_i)^2}{v} \right] \Leftrightarrow 3^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \left( \frac{\sum_{i=1}^k x_i v_i}{v} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$9 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - (\bar{x})^2 \Leftrightarrow 9 = \frac{1}{v} (2574) - (15)^2 \Leftrightarrow 225 + 9 = \frac{1}{v} (2574) \Leftrightarrow$$

$$v = 2574 / 234 = 11$$

Σωστή απάντηση η Α.

### ΑΣΚΗΣΗ 4

Για κάθε φυσικό αριθμό  $n$ , έστω  $\alpha_n$  ο μεγαλύτερος ακέραιος που δεν υπερβαίνει την  $\sqrt{n}$ . Η απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ του μέσου όρου και της διαμέσου των αριθμών  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{100}$  είναι:

A. 0,32

B. 0,66

Γ. 0,75

Δ. 1,02

## ΛΥΣΗ

Έχουμε την ακολουθία:

$$\alpha_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor, n = 1, 2, \dots, 100$$

και θέλουμε να βρούμε την απόλυτη τιμή της διαφοράς μεταξύ:

- του μέσου όρου των  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{100}$
- και της διαμέσου των ίδιων όρων.

Οι τιμές που παίρνει η  $\alpha_n$  για  $n = 1, \dots, 100$  είναι:

$$\alpha_n = k \Leftrightarrow k^2 \leq n < (k + 1)^2$$

Η μεγαλύτερη τιμή του  $k$  για  $n = 100$  είναι  $k = 10$  γιατί  $10^2 = 100$ .

Τα διαστήματα είναι:

- $k = 1: 1 \leq n < 4, 3$  όροι
- $k = 2: 4 \leq n < 9, 5$  όροι
- $k = 3: 9 \leq n < 16, 7$  όροι
- $k = 4: 16 \leq n < 25, 9$  όροι
- $k = 5: 25 \leq n < 36, 11$  όροι
- $k = 6: 36 \leq n < 49, 13$  όροι
- $k = 7: 49 \leq n < 64, 15$  όροι
- $k = 8: 64 \leq n < 81, 17$  όροι
- $k = 9: 81 \leq n < 100, 19$  όροι
- $k = 10: 100 \leq n \leq 100, 1$  όρος (μόνο το  $n = 100$ ). Συνεπώς, δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα:

k	Συχνότητα ( $v_i$ )	$k * v_i$	N
1	3	3	3
2	5	10	8
3	7	21	15
4	9	36	24
5	11	55	35
6	13	78	48
7	15	105	63
8	17	136	80
9	19	171	99
10	1	10	100
<b>Σύνολο</b>	<b>100</b>	<b>625</b>	

Συνεπώς, μέση τιμή =  $625/100 = 6,25$ . Για τον υπολογισμό της διαμέσου υπολογίζουμε  $N/2 = 50$ .

Αλλά  $48 < 50 < 63$ . Άρα διάμεσος = 7. Τελικά:  $|7 - 6,25| = 0,75$ .

**Σωστή απάντηση η Γ.**

### **ΑΣΚΗΣΗ 5**

Προϊόν βιομηχανίας συσκευάζεται σε πακέτα. Το βάρος κάθε πακέτου είναι μια τυχαία μεταβλητή  $X$  που μπορεί να πάρει με ίση πιθανότητα οποιαδήποτε ακέραια τιμή του διαστήματος  $[8,12]$ . Το βάρος κάθε πακέτου μετριέται σε kgr. Το κόστος παραγωγής κάθε πακέτου είναι μια τυχαία μεταβλητή  $Y$  η οποία μετριέται σε ευρώ και εξαρτάται από το βάρος  $X$  του πακέτου, σύμφωνα με τη σχέση:  $Y=0,1X+100$ . Αν ένα πακέτο έχει βάρος μεγαλύτερο από 9 kgr, πωλείται προς 150 ευρώ, ενώ αν έχει βάρος μικρότερο ή ίσο των 9 kgr πωλείται προς 80 ευρώ. Η μέση τιμή του κέρδους της βιομηχανίας ανά πακέτο είναι:

**A. 21**

**B. 26**

**Γ. 31**

**Δ. 32**

## ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος:

- Η τ.μ.  $X$  παίρνει τιμές: 8, 9, 10, 11, 12 kgr
- Αφού τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα  $P(X = x_i) = \frac{1}{5}$  για κάθε  $x_i$
- Το κόστος παραγωγής είναι  $Y = 0,1X + 100$  (σε ευρώ)
- Η τιμή πώλησης θα είναι:
  - ο 80 € αν  $X \leq 9$
  - ο 150 € αν  $X > 9$

Το κόστος παραγωγής για κάθε  $x_i$  θα είναι:

$x_i$	$Y = 0,1X + 100$
8	100,8
9	100,9
10	101
11	101,1
12	101,2

Το κέρδος που αντιστοιχεί σε κάθε περίπτωση θα είναι  $K = \text{Τιμή Πώλησης} - Y$ . Άρα:

$x_i$	Τιμή πώλησης	$K_i = \text{Πώληση} - Y_i$
<b>8</b>	80	$80 - 100,8 = -20,8$
<b>9</b>	80	$80 - 100,9 = -20,9$
<b>10</b>	150	$150 - 101 = 49$
<b>11</b>	150	$150 - 101,1 = 48,9$
<b>12</b>	150	$150 - 101,2 = 48,8$

Η ζητούμενη μέση τιμή θα είναι:

$$E(X) = \mu = \frac{1}{5} \{ -20,8 + (-20,9) + 49 + 48,9 + 48,8 \} = \frac{105}{5} = 21.$$

Σωστή απάντηση η Α.

### **ΑΣΚΗΣΗ 6**

Η τάση της μπαταρίας ενός νέου τύπου ηλεκτρικού αυτοκινήτου ακολουθεί μια περίπου κανονική κατανομή με μέση τιμή 400V και διακύμανση 25V.

Το εργοστάσιο παραγωγής του συγκεκριμένου μοντέλου ηλεκτρικού αυτοκινήτου παράγει ημερησίως 1.200 αυτοκίνητα.

Κατά τη φόρτιση των παραγόμενων αυτοκινήτων το εργοστάσιο ακολουθεί την εξής διαδικασία: Γίνεται μια αρχική φόρτιση και στη συνέχεια εάν κατά τη διάρκεια ελέγχου διαπιστωθεί ότι η τάση της μπαταρίας είναι μεταξύ 405V και 410V, τότε τα αυτοκίνητα προχωρούν κανονικά προς πώληση. Κάθε αυτοκίνητο που αποτυγχάνει στο αρχικό τεστ φόρτισης, ανακαλείται και η τάση του επαναρυθμίζεται σε κάποια τυχαία τιμή του διαστήματος από 400V έως 405V. Οι νέες τάσεις ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [400,405]. Εάν μετά το δεύτερο στάδιο φόρτισης η τάση της μπαταρίας ξεπερνά τα 401,75V, τότε το αυτοκίνητο προχωρά κανονικά προς πώληση. Στα αυτοκίνητα που δεν πληρούν τα κριτήρια μετά από δύο φορτίσεις τοποθετούνται καινούργιες μπαταρίες.

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα, πόσα αυτοκίνητα που αποτυγχάνουν στο πρώτο στάδιο φόρτισης, επιτυγχάνουν στο δεύτερο;

A. 580

B. 610

Γ. 655

**Δ. 675**

## ΛΥΣΗ

Η τάση φόρτισης (V) ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu = 400V$  και τυπική απόκλιση  $\sigma = 5V$ . Σύμφωνα με τα δεδομένα της κανονικής κατανομής, στο διάστημα  $[395,405]$  βρίσκεται το 68% των παρατηρήσεων, στο διάστημα  $[390,410]$  βρίσκεται το 95% των παρατηρήσεων, ενώ στο διάστημα  $[385,415]$  θα βρίσκεται το 99,7% των παρατηρήσεων της κατανομής. Άρα, όταν  $V < 405V$  έχουμε το 84% των παρατηρήσεων, ενώ όταν  $V < 410V$  έχουμε το 97,5% των παρατηρήσεων. Συνεπώς, στο διάστημα  $[405,410]$  θα βρίσκεται το 13,5% των παρατηρήσεων, που αντιστοιχεί σε  $1.200 \cdot (0,135) = 162$  αυτοκίνητα. Τα υπόλοιπα  $1.200 - 162 = 1.038$  αυτοκίνητα προχωρούν στο δεύτερο στάδιο φόρτισης. Στο δεύτερο στάδιο φόρτισης, επειδή η επιλογή της τιμής τάσης γίνεται με σταθερή πιθανότητα, η τάση φόρτισης (V) ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή  $U(400,405)$  και η πιθανότητα το αυτοκίνητο να προχωρήσει προς πώληση είναι:

$P[V > 401,75] = (405 - 401,75)/(405 - 400) = 3,25/5 = 0,65$ . Συνεπώς, μετά το δεύτερο στάδιο φόρτισης, από τα αυτοκίνητα που απέτυχαν στο πρώτο στάδιο,  $1.038 \cdot (0,65) = 675$  θα προχωρήσουν προς πώληση.

**Σωστή απάντηση η Δ.**

## ΑΣΚΗΣΗ 7

Σε ένα πρωτάθλημα ποδοσφαίρου, κάθε ομάδα έπαιζε ακριβώς ένα παιχνίδι εναντίον καθεμίας από τις άλλες ομάδες. Σε κάθε παιχνίδι, η νικήτρια ομάδα κέρδιζε 3 βαθμούς, η ηττημένη δεν έπαιρνε καθόλου βαθμούς και καθεμία από τις δύο ομάδες κέρδιζε από έναν βαθμό σε περίπτωση ισοπαλίας. Μετά την ολοκλήρωση του πρωταθλήματος, διαπιστώθηκε ότι ακριβώς το 75% των συνολικών βαθμών που κέρδισε καθεμία από τις συμμετέχουσες ομάδες κερδήθηκε σε παιχνίδια εναντίον των δέκα ομάδων με τον μικρότερο αριθμό βαθμών.

(Πιο αναλυτικά, καθεμία από τις δέκα ασθενέστερες ομάδες με τη χαμηλότερη βαθμολογία κέρδισε το 75% των συνολικών βαθμών της στα παιχνίδια εναντίον των άλλων εννέα από τις δέκα. Το ίδιο ποσοστό βαθμών, 75%, κέρδισε καθεμία από τις δυνατές ομάδες στα παιχνίδια εναντίον των δέκα ασθενέστερων ομάδων και το 25% των συνολικών βαθμών της το κέρδισε στα παιχνίδια με όλες τις υπόλοιπες δυνατές ομάδες.)

Υποθέτουμε επίσης ότι, από τα παιχνίδια που διεξήχθησαν α) μεταξύ όλων των ομάδων, β) μεταξύ των δυνατών ομάδων και γ) μεταξύ των ασθενέστερων ομάδων, το 60% κατέληξε σε νίκη και το 40% σε ισοπαλία. Ο συνολικός αριθμός ομάδων στο πρωτάθλημα ήταν:

A. 14

B. 16

Γ. 18

Δ. 20

### ΛΥΣΗ

Ας υποθέσουμε ότι συνολικά  $v$  ομάδες συμμετείχαν στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου. Για τους βαθμούς που συγκέντρωσαν θα δημιουργήσουμε δύο εκφράσεις σε  $v$ : μία λαμβάνοντας υπόψη τον συνολικό αριθμό βαθμών που συγκέντρωσαν όλες οι ομάδες, και μία λαμβάνοντας υπόψη τον αριθμό βαθμών που συγκέντρωσαν ξεχωριστά οι 10 πιο αδύνατες ομάδες (10 συμμετέχουσες με τη χαμηλότερη βαθμολογία) και αυτούς που συγκέντρωσαν οι πιο δυνατές (υπόλοιπες  $v - 10$  συμμετέχουσες).

Για να λάβουμε τις επιθυμητές εκφράσεις, θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι εάν οι  $v$  ομάδες έπαιξαν η μία εναντίον της άλλης, τότε έπαιξαν συνολικά  $v \cdot (v - 1) / 2$  παιχνίδια, εκ των οποίων το 60% έχει νικητή και δίνει 3 βαθμούς στη νικήτρια και το 40% καταλήγει σε ισοπαλία και δίνει από 1 βαθμό στις δύο ισόπαλες ομάδες, με αποτέλεσμα ένα άθροισμα:

$$3 \cdot (0,6) \cdot v(v - 1) / 2 + 2 \cdot (0,4) \cdot v(v - 1) / 2 = (1,3) \cdot v(v - 1) \text{ βαθμών που θα συγκεντρώσουν συνολικά [Σχ.1]}$$

Οι 10 πιο αδύνατες ομάδες έδωσαν μεταξύ τους  $10 \cdot (10 - 1) / 2 = 45$  παιχνίδια, εκ των οποίων το 60% [(0,6)·45=27 παιχνίδια] κατέληξαν σε νίκη και συγκεντρώθηκαν  $27 \cdot 3 = 81$  βαθμοί, και το υπόλοιπο 40% [(0,4)·45=18 παιχνίδια] έληξαν ισόπαλα και συγκεντρώθηκαν  $18 \cdot 2 = 36$  βαθμοί, δηλαδή συγκεντρώθηκαν στα 45 παιχνίδια μεταξύ των 10 αδύνατων ομάδων συνολικά:  $81 + 36 = 117$  ή  $3 \cdot 39 = 3 \cdot (1,3) \cdot 30$  βαθμοί.

Ομοίως, οι  $v - 10$  πιο δυνατές ομάδες έδωσαν  $(v - 10)(v - 11)/2$  παιχνίδια μεταξύ τους, εκ των οποίων το 60% έχει νικητή και δίνει 3 βαθμούς στη νικήτρια και το 40% καταλήγει σε ισοπαλία και δίνει από 1 βαθμό στις δύο ισόπαλες ομάδες, με αποτέλεσμα ένα άθροισμα:

$$3 \cdot (0,6) \cdot (v - 10)(v - 11)/2 + 2 \cdot (0,4) \cdot (v - 10)(v - 11)/2 = (1,3) \cdot (v - 10)(v - 11) \text{ βαθμών που θα}$$

συγκεντρώσουν οι  $v - 10$  δυνατές ομάδες στα μεταξύ τους παιχνίδια.

Επιπροσθέτως, οι 10 αδύνατες ομάδες θα διασταυρωθούν με τις  $v - 10$  δυνατές ομάδες σε  $10 \cdot (v - 10)$  παιχνίδια και βάσει της υπόθεσης ότι κάθε ομάδα συγκεντρώνει τα  $\frac{3}{4} = 75\%$  των βαθμών της εναντίον των δέκα αδύνατων ομάδων με τον μικρότερο αριθμό βαθμών προκύπτει ότι:

- οι δυνατές ομάδες στους αγώνες τους με τις 10 αδύνατες κερδίζουν επιπλέον  $3 \cdot (1,3) \cdot (v - 10)(v - 11)$  βαθμούς
- οι αδύνατες ομάδες στους αγώνες τους με τις  $v - 10$  δυνατές κερδίζουν επιπλέον  $(1/3) \cdot 117 = (1/3) \cdot 3 \cdot 39 = 39 = (1,3) \cdot 30$  βαθμούς

Συνολικά οι δυνατές και οι αδύνατες ομάδες συγκεντρώνουν στο σύνολο όλων των παιχνιδιών:

$$4 \cdot (1,3) \cdot (v - 10)(v - 11) + 4 \cdot (1,3) \cdot 30 \text{ βαθμούς [Σχ.2].}$$

Από τις [Σχ.1] & [Σχ.2] καταρτίζουμε την εξίσωση:  $(1,3) \cdot v(v - 1) = 4 \cdot (1,3) \cdot (v - 10)(v - 11) + 4 \cdot (1,3) \cdot 30$

$$\Leftrightarrow v(v - 1) = 4 \cdot (v - 10)(v - 11) + 4 \cdot 30, \text{ η οποία ισοδυναμεί με } 3 \cdot v^2 - 83 \cdot v + 560 = 0.$$

Η δευτεροβάθμια αυτή εξίσωση έχει δύο λύσεις:  $v = 16$  και  $v = 35/3 = 11,667$

Κρατάμε την 1η λύση, που είναι ακέραια, δηλαδή  $v = 16$  συμμετέχουσες ομάδες στο πρωτάθλημα.

Επαλήθευση ότι υπάρχει τέτοιο πρωτάθλημα:

Εφόσον  $v = 16$ , διακρίνουμε τις συμμετέχουσες ομάδες σε 6 δυνατές ομάδες και 10 αδύνατες.

Οι ομάδες παίζουν συνολικά  $16 \cdot (16 - 1)/2 = 120$  παιχνίδια, από τα οποία οι δυνατές δίνουν μεταξύ τους  $6 \cdot (6 - 1)/2 = 15$  παιχνίδια, οι 10 αδύνατες δίνουν  $10 \cdot (10 - 1)/2 = 45$  παιχνίδια και τα υπόλοιπα  $10 \cdot (16 - 10) = 60$  δίνονται μεταξύ δυνατών και αδύνατων ομάδων.

Βάσει υπόθεσης, το 60% των παιχνιδιών καταλήγει σε νίκη μίας εκ των δύο ομάδων, ενώ στο 40% των παιχνιδιών σημειώνεται ισοπαλία, οπότε:

- στα 15 παιχνίδια ανάμεσα στις δυνατές σημειώνονται 9 νίκες και 6 ισοπαλίες (συγκεντρώνονται συνολικά  $9 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 39$  βαθμοί σε αυτά τα 15 παιχνίδια)

- στα 45 παιχνίδια ανάμεσα στις αδύνατες σημειώνονται 27 νίκες και 18 ισοπαλίες (συγκεντρώνονται συνολικά  $27 \cdot 3 + 18 \cdot 2 = 117$  βαθμοί σε αυτά τα 45 παιχνίδια)
- στα 60 παιχνίδια μεταξύ δυνατών και αδυνάτων σημειώνονται 36 νίκες και 24 ισοπαλίες (συγκεντρώνονται συνολικά  $36 \cdot 3 + 24 \cdot 2 = 156$  βαθμοί σε αυτά τα 60 παιχνίδια, από τους οποίους οι δυνατές ομάδες συγκεντρώνουν επιπλέον  $3 \cdot 39 = 117$  –τριπλάσιους δηλαδή παίζοντας με αδύνατες–, και οι αδύνατες συγκεντρώνουν επιπλέον  $(1/3) \cdot 117 = 39$  παίζοντας με δυνατές)

Επομένως, όλες οι ομάδες (δυνατές και αδύνατες) συγκεντρώνουν ακριβώς το 75% των συνολικών βαθμών τους παίζοντας με τις 10 πιο αδύνατες ομάδες, που συγκέντρωσαν δηλαδή τη χαμηλότερη βαθμολογία, όπως απαιτείται από το πρόβλημα.

**Σωστή απάντηση η Β.**

## **ΑΣΚΗΣΗ 8**

Μια στατιστική έρευνα για τους μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης της υπαίθρου πραγματοποιήθηκε σε έναν αριθμό χωριών μιας χώρας που εκτείνονταν σε τρεις γεωγραφικές περιοχές, τη Βορειοανατολική (ΒΑ), τη Δυτική (Δ) και τη Νότια (Ν). Από τα 150 χωριά της ΒΑ περιοχής, τα 250 χωριά της Δ και τα 200 χωριά της Ν περιοχής επιλέχθηκαν δείγματα 50 παιδιών ηλικίας από 6 έως 10 ετών.

Διαπιστώθηκε ότι από τα 30.000 παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα, το 55% αυτών φοιτούσε σε δημόσια δημοτικά σχολεία (Δ), το 37% σε ιδιωτικά σχολεία (Ι), ενώ το υπόλοιπο 8% δεν πήγαινε καθόλου σχολείο (Ο).

Τα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα χωρίστηκαν περαιτέρω σε δύο ομάδες, με βάση το αν οι μητέρες τους εγκατέλειψαν το σχολείο πριν ολοκληρώσουν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση ή όχι. Ο παρακάτω πίνακας μας παρουσιάζει τον αριθμό των παιδιών στους τρεις διαφορετικούς τύπους σχολείων για την περίπτωση που οι μητέρες τους εγκατέλειψαν το σχολείο πριν ολοκληρώσουν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση:

	<b>Δ</b>	<b>Ι</b>	<b>Ο</b>	<b>Σύνολο</b>
<b>BA</b>	4.200	500	300	5.000
<b>Δ</b>	4.200	1.900	1.200	7.300
<b>N</b>	5.100	300	300	5.700
<b>Σύνολο</b>	13.500	2.700	1.800	<b>18.000</b>

Είναι επίσης γνωστό ότι:

4. Στη Νότια περιοχή (N), το 60% των παιδιών που συμμετείχαν στην έρευνα φοιτούσε σε δημόσια σχολεία (Δ). Επιπλέον, στη Νότια περιοχή (N), όλα τα παιδιά των οποίων οι μητέρες είχαν ολοκληρώσει την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, φοιτούσαν σε κάποιο σχολείο.
5. Στη Βορειοανατολική περιοχή (BA), μεταξύ των παιδιών που δεν πήγαιναν σχολείο (Ο), το 50% είχε μητέρες που είχαν εγκαταλείψει το σχολείο πριν ολοκληρώσουν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση.
6. Ο αριθμός των παιδιών σε δημόσια σχολεία (Δ) στη BA περιοχή ήταν ίσος με τον αριθμό των παιδιών σε δημόσια σχολεία (Δ) στη Δυτική περιοχή (Δ).

Σε μια επαναληπτική έρευνα στα ίδια παιδιά, δύο χρόνια αργότερα, διαπιστώθηκε ότι πλέον όλα τα παιδιά φοιτούσαν σε κάποιο σχολείο. Από τα παιδιά που προηγουμένως δεν πήγαιναν σχολείο, σε μία περιοχή το 25% αυτών φοιτούσε τώρα σε δημόσιο σχολείο (Δ), ενώ τα υπόλοιπα είχαν εγγραφεί σε ιδιωτικό σχολείο (Ι). Στη δεύτερη περιοχή, όλα αυτά τα παιδιά φοιτούσαν τώρα σε δημόσιο σχολείο (Δ). Στην τρίτη περιοχή, το 50% αυτών των παιδιών είχε εγγραφεί τώρα σε δημόσιο σχολείο (Δ), ενώ τα υπόλοιπα σε ιδιωτικό σχολείο (Ι).

Ως αποτέλεσμα, και στις τρεις περιοχές συνολικά, το 50% των παιδιών που προηγουμένως δεν πήγαιναν σχολείο είχε πλέον εγγραφεί σε δημόσιο σχολείο (Δ). Επίσης, παρατηρήθηκε ότι κανένα από τα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα δεν είχε αλλάξει σχολείο.

Η πιθανότητα να επιλέξουμε μαθητή της Νότιας περιοχής (N), του οποίου η μητέρα είχε εγκαταλείψει το σχολείο πριν ολοκληρώσει την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, και τώρα το παιδί φοιτά σε δημόσιο σχολείο (Δ) είναι:

A. 89,3%

B. 91,7%

Γ. 92,1%

Δ. 94,7%

### ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε την κατανομή των παιδιών σε Δ Σχολεία, Ι Σχολεία και στην ομάδα Ο για τις μητέρες που εγκατέλειψαν το σχολείο πριν ολοκληρώσουν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Αν μπορέσουμε να συμπληρώσουμε έναν παρόμοιο πίνακα για τις μητέρες που ολοκλήρωσαν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, αυτό θα ήταν πολύ χρήσιμο. Γνωρίζουμε τους συνολικούς αριθμούς και έτσι μπορούμε να συμπληρώσουμε τα κενά.

Γνωρίζουμε ότι:

Μητέρες που εγκατέλειψαν	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
BA	4.200	500	300	5.000
Δ	4.200	1.900	1.200	7.300
N	5.100	300	300	5.700
Σύνολο	13.500	2.700	1.800	18.000

Ο συνολικός πίνακας θα είναι:

Συνολικός Πίνακας	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
BA				7.500
Δ				12.500
N				10.000
Σύνολο	16.500	11.100	2.400	30.000

Τώρα μπορούμε να δημιουργήσουμε τον παρακάτω πίνακα:

Μητέρες που ολοκλήρωσαν	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
BA				2.500
Δ				5.200
N				4.300
Σύνολο	3.000	8.400	600	12.000

Στη Νότια περιοχή (N), συνολικά 6.000 μαθητές φοιτούσαν σε δημόσια σχολεία (Δ). Από αυτούς, οι 5.100 είναι από μητέρες που είχαν εγκαταλείψει το σχολείο. Άρα, οι μαθητές σε δημόσια σχολεία με μητέρες που ολοκλήρωσαν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση θα πρέπει να είναι 900. Και η ομάδα «Δεν πηγαίνουν σχολείο» (O) στον πίνακα θα πρέπει να είναι 0. Άρα:

Μητέρες που ολοκλήρωσαν	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
BA				2.500
Δ				5.200
N	900	3.400	0	4.300
Σύνολο	3.000	8.400	600	12.000

Το πεδίο BA-O θα πρέπει να είναι ίδιο και στους πίνακες «Μητέρα που εγκατέλειψε» και «Μητέρα που ολοκλήρωσε». Δηλαδή, το BA-O στον πίνακα θα πρέπει να είναι 300. Αυτό μας δίνει επίσης την τιμή για το Δ-O στον πίνακα.

Μητέρες που ολοκλήρωσαν	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
BA			300	2.500
Δ			300	5.200
N	900	3.400	0	4.300
Σύνολο	3.000	8.400	600	12.000

Το Δ στη Βορειοανατολική (BA) και το Δ στη Δυτική (Δ) περιοχή, και στις δύο περιπτώσεις για τις μητέρες που εγκατέλειψαν το σχολείο, είναι 4.200 η καθεμία. Επομένως, το Δ στη BA και το Δ στη Δ περιοχή θα πρέπει επίσης να είναι ίσα μεταξύ τους. Αυτά τα δύο κελιά θα πρέπει να είναι 1.050.

Άρα:

Μητέρες που ολοκλήρωσαν	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
ΒΑ	1.050		300	2.500
Δ	1.050		300	5.200
Ν	900	3.400	0	4.300
Σύνολο	3.000	8.400	600	12.000

Συνεπώς:

Μητέρες που ολοκλήρωσαν	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
ΒΑ	1.050	1.150	300	2.500
Δ	1.050	3.850	300	5.200
Ν	900	3.400	0	4.300
Σύνολο	3.000	8.400	600	12.000

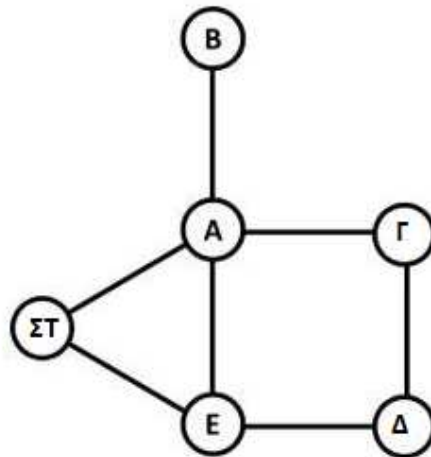
Άρα, τα 300 παιδιά που ήταν στην ομάδα Ο αρχικά, τώρα έχουν μετακινηθεί στο Δ. Δηλαδή, το Δ τώρα ανέρχεται σε 5.400.

Το ζητούμενο ποσοστό είναι  $5.400/5.700 \times 100 = 94,7\%$ .

**Σωστή απάντηση η Δ.**

## ΑΣΚΗΣΗ 9

A, B, Γ, Δ, E και ΣΤ είναι έξι Αστυνομικά Τμήματα σε μια περιοχή, τα οποία συνδέονται με δρόμους όπως φαίνεται παρακάτω. Τέσσερις ομάδες –Ομάδα 1, Ομάδα 2, Ομάδα 3 και Ομάδα 4– περιπολούν συνεχώς στους δρόμους αυτούς από τις 09:00 το πρωί έως τις 12:00 το μεσημέρι κάθε μέρα.



Οι ομάδες χρειάζονται 30 λεπτά για να διασχίσουν έναν δρόμο που συνδέει ένα Αστυνομικό Τμήμα με ένα άλλο. Και οι τέσσερις ομάδες ξεκινούν από το Τμήμα A στις 09:00 και πρέπει να επιστρέψουν στο Τμήμα A έως τις 12:00. Μπορούν επίσης να περάσουν από το Τμήμα A οποιαδήποτε στιγμή κατά τη διάρκεια της διαδρομής τους.

Γνωρίζουμε τα εξής:

1. Κανένας δρόμος δεν διασχίζεται από περισσότερες από μία ομάδες προς οποιαδήποτε κατεύθυνση την ίδια χρονική στιγμή.
2. Οι Ομάδες 2 και 3 είναι οι μόνες που βρίσκονται στα Τμήματα E και Δ, αντίστοιχα, στις 10:00.
3. Οι Ομάδες 1 και 3 είναι οι μόνες που βρίσκονται στο Τμήμα E στις 10:30.
4. Οι Ομάδες 1 και 4 είναι οι μόνες που βρίσκονται στα Τμήματα B και E, αντίστοιχα, στις 11:30.
5. Οι Ομάδες 1 και 4 είναι οι μόνες ομάδες που περιπολούν τον δρόμο που συνδέει τα Τμήματα A και E.
6. Η Ομάδα 4 δεν περνάει ποτέ από τα Τμήματα B, Δ ή ΣΤ.

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα, η πιθανότητα να περάσουν από το Τμήμα Γ δύο ομάδες περιπολίας είναι:

A. 25%

B. 50%

Γ. 75%

**Δ. 100%**

### **ΛΥΣΗ**

Ας προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε βήμα-βήμα τα δεδομένα του προβλήματος.

Δεδομένου ότι τέσσερις ομάδες –Ομάδα 1, Ομάδα 2, Ομάδα 3 και Ομάδα 4– περιπολούν συνεχώς στους δρόμους αυτούς από τις 09:00 το πρωί έως τις 12:00 το μεσημέρι, αντιλαμβανόμαστε ότι κάθε ομάδα θα πρέπει να πραγματοποιήσει 6 περιπολίες των 30 λεπτών η καθεμία ξεκινώντας από το Τμήμα Α.

Οι ομάδες 2 και 3 είναι οι ομάδες που βρίσκονται στα Τμήματα Ε και Δ, αντίστοιχα, στις 10.00 το πρωί. Αυτές οι δύο ομάδες έφτασαν εκεί ακολουθώντας τις διαδρομές:

Η 2 η διαδρομή  $A \rightarrow \Sigma\Gamma \rightarrow E$  και η 3 η διαδρομή  $A \rightarrow E \rightarrow \Delta$  ή  $A \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta$ . Δεδομένου όμως ότι οι ομάδες 1 και 4 περιπολούν τη διαδρομή ΑΕ, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τελικά η ομάδα 2 έκανε τη διαδρομή  $A \rightarrow \Sigma\Gamma \rightarrow E$  και η ομάδα 3 έκανε τη διαδρομή  $A \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta$ . Έχουμε επομένως τον παρακάτω πίνακα:

	9:00 π.μ.	9:30 π.μ.	10:00 π.μ.	10:30 π.μ.	11:00 π.μ.	11:30 π.μ.	12:00
<b>Ομάδα 1</b>	A						A
<b>Ομάδα 2</b>	A	ΣΤ	E				A
<b>Ομάδα 3</b>	A	Γ	Δ				A
<b>Ομάδα 4</b>	A						A

Από τον συνδυασμό των δεδομένων 3 και 4, ο πίνακάς μας γίνεται:

	9:00 π.μ.	9:30 π.μ.	10:00 π.μ.	10:30 π.μ.	11:00 π.μ.	11:30 π.μ.	12:00
<b>Ομάδα 1</b>	A			E		B	A
<b>Ομάδα 2</b>	A	ΣΤ	E				A
<b>Ομάδα 3</b>	A	Γ	Δ	E			A
<b>Ομάδα 4</b>	A					E	A

Με το δεδομένο 6 η ομάδα 4 περιπολεί μόνο μεταξύ  $A \rightarrow \Gamma$  και  $A \rightarrow E$  και με βάση το δεδομένο 1 ο πίνακας γίνεται:

	9:00 π.μ.	9:30 π.μ.	10:00 π.μ.	10:30 π.μ.	11:00 π.μ.	11:30 π.μ.	12:00
<b>Ομάδα 1</b>	A	B	A	E	A	B	A
<b>Ομάδα 2</b>	A	ΣΤ	E	ΣΤ			A
<b>Ομάδα 3</b>	A	Γ	Δ	E			A
<b>Ομάδα 4</b>	A	E	A	Γ	A	E	A

Αν τώρα αξιοποιήσουμε το δεδομένο 1 σε συνδυασμό με τα δεδομένα του πίνακα, τελικά ο πίνακας συμπληρώνεται πλήρως ως εξής:

	9:00 π.μ.	9:30 π.μ.	10:00 π.μ.	10:30 π.μ.	11:00 π.μ.	11:30 π.μ.	12:00
Ομάδα 1	A	B	A	E	A	B	A
Ομάδα 2	A	ΣΤ	E	ΣΤ	A/E	ΣΤ	A
Ομάδα 3	A	Γ	Δ	E	Δ	Γ	A
Ομάδα 4	A	E	A	Γ	A	E	A

Από τον πίνακα διακρίνουμε ότι 2 ομάδες από τις 4 πέρασαν από το Τμήμα Γ.

**Σωστή απάντηση η Δ.**

### **ΑΣΚΗΣΗ 10**

Το Τμήμα Ανάλυσης Δεδομένων μιας μεγάλης πολυεθνικής εταιρείας συνέλεξε και ανέλυσε τα δεδομένα 200 εταιρειών από την περσινή διαφημιστική τους καμπάνια προκειμένου να προτείνει στο Τμήμα Μάρκετινγκ τη διαφημιστική πολιτική του επόμενου έτους. Συγκεκριμένα, μελέτησε τα

ετήσια συνολικά ποσά των πωλήσεων (σε χιλιάδες ευρώ) διαφόρων εταιρειών, και τα συνολικά ποσά που ξόδεψαν οι εταιρείες αυτές (σε χιλιάδες ευρώ) για τις διαφημιστικές τους καμπάνιες στην τηλεόραση, στο ραδιόφωνο και στις εφημερίδες. Ο παρακάτω πίνακας μας παρουσιάζει τα περιγραφικά στοιχεία που προέκυψαν από την ανάλυση των ποσών, σε χιλιάδες ευρώ, που δαπανήθηκαν από τις εταιρείες για κάθε είδος διαφημιστικής καμπάνιας, καθώς και των πωλήσεων που οι εταιρείες πραγματοποίησαν.

**ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ**

	Τηλεόραση	Ραδιόφωνο	Εφημερίδες	Πωλήσεις
Τυπική απόκλιση	85,85424	14,84681	21,77862	5,28389
Ελάχιστη τιμή	0,70	0,00	0,30	1,60
Μέγιστη τιμή	296,40	49,60	114,00	27,00
Άθροισμα	29.408,50	4.652,80	6.110,10	3.026,10

Επίσης, ο παρακάτω πίνακας μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα των γραμμικών συσχετίσεων μεταξύ των συνολικών πωλήσεων των εταιρειών και του είδους της διαφημιστικής δαπάνης που πραγματοποίησαν.

**ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ PEARSON ( r )**

	Τηλεόραση	Ραδιόφωνο	Εφημερίδες
Πωλήσεις	0,901	0,350	0,158

Η απόφαση του Τμήματος Μάρκετινγκ είναι να χρησιμοποιήσει το μέγιστο δυνατό ποσό βάσει των παραπάνω πινάκων με τον πιο αποδοτικό τρόπο. Εάν η πολυεθνική εταιρεία ακολουθήσει αυτήν την πολιτική, οι πωλήσεις της το επόμενο έτος αναμένεται να ανέλθουν περίπου σε:

- A. 23.427 ευρώ
- B. 21.315 ευρώ
- Γ. 22.753 ευρώ
- Δ. 24.617 ευρώ

## ΛΥΣΗ

Δύο είναι τα βασικά ερωτήματα τα οποία θα πρέπει να απαντηθούν.

1. Ποιο είναι το ποσό που θα πρέπει να δαπανηθεί στη διαφημιστική καμπάνια της πολυεθνικής εταιρείας και πώς αυτό θα πρέπει να διανεμηθεί μεταξύ Τηλεόρασης, Ραδιοφώνου και Εφημερίδων.
2. Βάσει ποιου μαθηματικού μοντέλου θα γίνει η παραπάνω πρόβλεψη.

Παρατηρώντας προσεκτικά τον πίνακα των συσχετίσεων διακρίνουμε ότι οι συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών Πωλήσεις - Τηλεόραση, Πωλήσεις - Ραδιόφωνο και Πωλήσεις - Εφημερίδες είναι 0,901, 0,350 και 0,158 αντίστοιχα, τιμές που μας βοηθούν να καταλήξουμε στη διαπίστωση ότι υπάρχει μια πολύ ισχυρή γραμμική συσχέτιση μεταξύ των αριθμό των πωλήσεων και της τηλεοπτικής διαφημιστικής καμπάνιας, γεγονός που ισχυροποιεί το γεγονός ότι για να πετύχει η εταιρεία το μέγιστο αριθμό πωλήσεων θα πρέπει να προχωρήσει σε τηλεοπτική διαφημιστική καμπάνια. Συνεπώς, η καλύτερη πολιτική είναι να θεωρήσουμε με βάση τα δεδομένα μας ένα μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης με εξαρτημένη μεταβλητή τις πωλήσεις και ανεξάρτητη μεταβλητή την Τηλεόραση. Η ευθεία της γραμμικής παλινδρόμησης θα είναι της μορφής:

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$$

Γνωρίζουμε όμως ότι ασφαλείς προβλέψεις μπορεί να γίνουν μόνο για τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής που βρίσκονται εντός του διαστήματος δημιουργίας του μοντέλου μας. Αυτό σημαίνει ότι το μεγαλύτερο ποσό που μπορεί να διαθέσει ασφαλώς η εταιρεία είναι 296.400 ευρώ και το ελάχιστο ποσό 700 ευρώ για την τηλεοπτική της διαφημιστική της καμπάνια.

Για τον υπολογισμό του μοντέλου μας ακολουθούμε την εξής διαδικασία.

Γνωρίζουμε ότι:

$$r = \hat{\beta} \frac{s_x}{s_y}.$$

Από τον πίνακα των περιγραφικών στοιχείων έχουμε ότι:

$s_y = 5,28389$ ,  $s_x = 85,85424$  και  $r = 0,901$ . Άρα,  $\hat{\beta} = [(0,901) \cdot (5,28389)] / 85,85424 = 0,0555$

και

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$$

δηλ.  $\hat{\alpha} = (3.026,10/200) - 0,055 \cdot (29.408,50/200) = 6,977$

Συνεπώς, η ευθεία της γραμμικής παλινδρόμησης θα είναι η:

$$\text{Πωλήσεις} = 6,977 + 0,0555 \cdot \text{Τηλεόραση}.$$

Με βάση το παραπάνω μοντέλο, εάν η εταιρεία ξοδέψει 296.400 ευρώ για διαφημιστική καμπάνια στην τηλεόραση, τότε οι πωλήσεις της αναμένονται να είναι:  $6,977 + 0,0555 \cdot (296,40) = 23,427$ , δηλ. περίπου 23.427 ευρώ.

**Σωστή απάντηση η Α.**

### ΕΚΔΟΧΗ 3

#### ΑΣΚΗΣΗ 1

Ας θεωρήσουμε μια ακολουθία ακεραίων  $a_1, a_2, \dots$  τέτοια ώστε:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n = n, n \geq 1$$

Η απόλυτη τιμή της διαφοράς της διαμέσου των όρων  $a_{51}, a_{52}, \dots, a_{1.023}$  από τη μέση τιμή τους είναι περίπου:

**A. 0,897**

**B. 0,999**

**Γ. 1,002**

**Δ. 1,167**

## ΛΥΣΗ

Ορίζουμε το άθροισμα:

$$S_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n = n$$

Παρατηρούμε για μικρές τιμές του  $n$ :

1.  $n = 1: a_1 = 1$
2.  $n = 2: a_1 - a_2 = 2 \Rightarrow 1 - a_2 = 2 \Rightarrow a_2 = -1$
3.  $n = 3: a_1 - a_2 + a_3 = 3 \Rightarrow 1 - (-1) + a_3 = 3 \Rightarrow a_3 = 1$
4.  $n = 4: a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 4 \Rightarrow 1 - (-1) + 1 - a_4 = 4 \Rightarrow a_4 = -1$

Παρατηρούμε το μοτίβο:

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ περιττός} \\ -1, & n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Αυτό ισχύει για όλους τους  $n \geq 1$ .

Συνεπώς:

Αν ο δείκτης είναι περιττός  $\rightarrow$  όρος = 1

Αν ο δείκτης είναι άρτιος  $\rightarrow$  όρος = -1

Αριθμός όρων:

$$1.023 - 51 + 1 = 973 \text{ όροι}$$

Αριθμός περιττών όρων:

$$\frac{1.023 - 51}{2} + 1 = \frac{972}{2} + 1 = 486 + 1 = 487$$

Αριθμός άρτιων όρων:  $973 - 487 = 486$

Άρα ο μέσος όρος θα είναι:

$$\text{μέσος όρος} = \frac{487 \cdot 1 + 486 \cdot (-1)}{973} = \frac{487 - 486}{973} = \frac{1}{973}$$

Για να υπολογίσουμε τη διάμεσο, σκεφτόμαστε ως εξής:

- Οι όροι εναλλάσσονται  $1, -1, 1, -1, \dots$
- Υπάρχουν 973 όροι (περιττός αριθμός)  $\rightarrow$  η διάμεσος είναι η κεντρική τιμή. Άρα:

$$\text{θέση διαμέσου} = \frac{973 + 1}{2} = 487\text{ος όρος}$$

- Οι περιττές θέσεις στη σειρά έχουν τιμή 1, οι άρτιες  $-1$ .
- Η 487η θέση είναι περιττή  $\rightarrow$  διάμεσος = 1

Επομένως, η απόλυτη τιμή της διαφοράς θα είναι:

$$|\text{μέσος όρος} - \text{διάμεση}| = \left| \frac{1}{973} - 1 \right| = \left| -\frac{972}{973} \right| = \frac{972}{973} \approx 0,999$$

**Σωστή απάντηση η Β.**

## **ΑΣΚΗΣΗ 2**

Στο πάρκινγκ μικράς διάρκειας του αεροδρομίου Ελευθέριος Βενιζέλος υπάρχουν σειρές με 32 θέσεις στάθμευσης αυτοκινήτων η καθεμία. Ένα αυτοκίνητο σταθμεύει σε μία από τις 30 εσωτερικές θέσεις μιας σειράς προκειμένου να αφήσει επιβάτη. Μετά την αναχώρηση αεροπορικά των επιβατών, ο ιδιοκτήτης επιστρέφει να πάρει το αυτοκίνητό του. Τον πληροφορούν ότι στη σειρά που είχε παρκάρει βρίσκονται 18 σταθμευμένα αυτοκίνητα. Επειδή είναι σχετικά αδέξιος οδηγός, θα ήθελε, για την ευκολία του, να είναι ελεύθερες οι εκατέρωθεν του αυτοκινήτου του γειτονικές θέσεις. Η πιθανότητα να είναι κενές οι θέσεις αυτές είναι:

- A. 12,43%
- B. 10,57%
- Γ. 15,43%
- Δ. 19,57%**

## **ΛΥΣΗ**

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, μία σειρά έχει 32 θέσεις συνολικά. Ο οδηγός είχε παρκάρει σε μία από τις 30 εσωτερικές θέσεις, δηλαδή όχι στις δύο άκρες (επομένως έχει δύο γείτονες). Άρα η θέση του είναι μία από τις θέσεις 2, 3, ..., 31. Τώρα στη σειρά βρίσκονται 18 σταθμευμένα αυτοκίνητα (από τις 32 θέσεις). Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα οι δύο γειτονικές θέσεις (αριστερή και δεξιά) της δικής του να είναι άδειες.

Θα θεωρήσουμε τη δική του θέση σταθερή — π.χ. τη θέση  $i$  (με  $2 \leq i \leq 31$ ). Θέλουμε η θέση  $i$  να είναι κατειλημμένη από τον ίδιο και οι γειτονικές θέσεις  $i - 1$  και  $i + 1$  να είναι κενές. Μένουν επομένως 31 θέσεις, στις οποίες είναι σταθμευμένα 17 αυτοκίνητα.

Θέλουμε δύο συγκεκριμένες θέσεις (οι γείτονές του ) να μην ανήκουν στις 17 κατειλημμένες θέσεις.

Άρα αριθμός ευνοϊκών περιπτώσεων = αριθμός τρόπων να διαλέξουμε 17 κατειλημμένες θέσεις μέσα στις υπόλοιπες 29 (δηλαδή εξαιρούμε τις 2 γειτονικές):

$$\binom{29}{17}$$

Συνολικές περιπτώσεις = τρόποι να διαλέξουμε οποιοσδήποτε 17 κατειλημμένες θέσεις από τις 31:

$$\binom{31}{17}$$

Άρα η πιθανότητα είναι:

$$P = \frac{\binom{29}{17}}{\binom{31}{17}} = 0,1957$$

**Σωστή απάντηση η Δ.**

### **ΑΣΚΗΣΗ 3**

Τα χρήματα, σε ευρώ, που ξόδεψαν ορισμένα άτομα για πετρέλαιο τον περασμένο μήνα ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή. Γνωρίζουμε ότι κάτω από 40 ευρώ ξόδεψε το 2,5% των ατόμων, ενώ πάνω από 130 ευρώ ξόδεψε το 16% των ατόμων. Εάν, επιπλέον, γνωρίζουμε ότι πάνω από 190 ευρώ και κάτω από 10 ευρώ, συνολικά, ξόδεψαν 5 άτομα, ο αριθμός των ατόμων που ξόδεψαν τουλάχιστον 70 ευρώ είναι:

**A. 1.253**

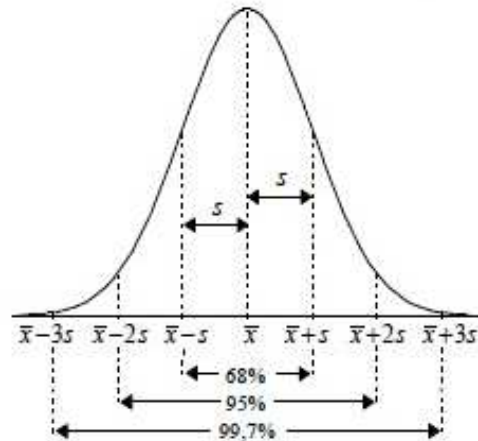
**B. 1.401**

**Γ. 1.414**

**Δ. 1.615**

## ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι για την κανονική κατανομή ισχύει το παρακάτω διάγραμμα:



Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, ισχύουν οι δύο σχέσεις:

$\mu - 2\sigma = 40$  και  $\mu + \sigma = 130$ . Επιλύοντας το παραπάνω σύστημα, έχουμε  $\mu = 100$  και  $\sigma = 30$ .

Άρα τα χρήματα σε ευρώ που ξόδεψαν τα άτομα για πετρέλαιο τον περασμένο μήνα ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή 100 ευρώ και τυπική απόκλιση  $\sigma = 30$  ευρώ.

Επειδή πάνω από 190 ευρώ και κάτω από 10 ευρώ, συνολικά, ξόδεψαν 5 άτομα, εάν  $N$  είναι ο

συνολικός αριθμός των ατόμων, θα ισχύει ότι:  $\frac{5}{N} = 0,003 \Rightarrow N = 1.667$  άτομα. Συνεπώς, τουλάχιστον

70 ευρώ ξόδεψαν  $(0,84) \cdot (1.667) = 1.401$  άτομα.

**Σωστή απάντηση η Β.**

## ΑΣΚΗΣΗ 4

Ένα κουτί περιέχει 6 μπάλες κρίκετ, 5 μπάλες τένις και 4 λαστιχένιες μπάλες. Από αυτές, μερικές μπάλες είναι ελαττωματικές. Η αναλογία των ελαττωματικών μπαλών κρίκετ είναι μεγαλύτερη από την αναλογία των ελαττωματικών μπαλών τένις, αλλά μικρότερη από την αναλογία των ελαττωματικών λαστιχένιων μπαλών. Επιπλέον, η συνολική αναλογία των ελαττωματικών μπαλών

είναι διπλάσια από την αναλογία των ελαττωματικών μπαλών τένις. Αν τραβήξουμε μία μπάλα από το κουτί, ποια είναι η πιθανότητα να είναι μία ελαττωματική λαστιχένια μπάλα;

A. 15%

B. 18%

Γ. 20%

Δ. 25%

### ΛΥΣΗ

Στο κουτί έχουμε:

- Μπάλες κρίκετ: 6
- Μπάλες τένις: 5
- Λαστιχένιες μπάλες: 4

Έστω:

$x$  = αριθμός ελαττωματικών μπαλών κρίκετ

$y$  = αριθμός ελαττωματικών μπαλών τένις

$z$  = αριθμός ελαττωματικών λαστιχένιων μπαλών

Οπότε έχουμε τις αναλογίες:

$$\text{Κρίκετ: } \frac{x}{6}, \text{ Τένις: } \frac{y}{5}, \text{ Λαστιχένιες: } \frac{z}{4}$$

Ισχύουν όμως οι συνθήκες:

- $\frac{x}{6} > \frac{y}{5}$  και  $\frac{x}{6} < \frac{z}{4}$

Δηλαδή, η αναλογία των ελαττωματικών μπαλών κρίκετ είναι μεγαλύτερη από αυτή των μπαλών τένις αλλά μικρότερη από αυτή των λαστιχένιων.

- Η συνολική αναλογία των ελαττωματικών μπαλών είναι διπλάσια από την αναλογία των ελαττωματικών μπαλών τένις:

$$\frac{x + y + z}{6 + 5 + 4} = 2 \cdot \frac{y}{5} \Rightarrow \frac{x + y + z}{15} = \frac{2y}{5} \Rightarrow x + y + z = 6y$$

Άρα:

$$x + z = 6y - y = 5y$$

Εκφράζουμε  $z$  ως προς  $x$  και  $y$ :

$$z = 5y - x$$

Ισχύουν όμως και οι συνθήκες:

$$\frac{x}{6} > \frac{y}{5} \Rightarrow 5x > 6y$$

$$\frac{x}{6} < \frac{z}{4} \Rightarrow 4x < 6y - 4x \Rightarrow 8x < 20y \Rightarrow x < 2,5y$$

Άρα έχουμε τις ανισότητες:

$$1,2y < x < 2,5y$$

Όλοι οι αριθμοί πρέπει να είναι ακέραιοι, και:

$$x \leq 6, y \leq 5, z \leq 4$$

$$\text{Από το } x + z = 5y \text{ και } z \leq 4 \Rightarrow x \geq 5y - 4$$

Άρα έχουμε:

$$5y - 4 \leq x \leq 6$$

Ταυτόχρονα:

$$1,2y < x < 2,5y$$

Συνδυάζουμε τα:

$$\max(5y - 4, 1,2y) \leq x \leq \min(6, 2,5y)$$

Δοκιμάζουμε τις ακέραιες τιμές του  $y$  από 1 έως 5:

- $y = 1$ :

$$\max(5 * 1 - 4, 1,2 * 1) = \max(1, 1,2) = 1,2$$

$$\min(6, 2,5 * 1) = \min(6, 2,5) = 2,5$$

Άρα  $1,2 \leq x \leq 2,5 \Rightarrow x = 2$  (μόνο ακέραιος)

Τότε  $z = 5 * 1 - 2 = 3$

Έλεγχος αναλογιών:

- Κρίκετ:  $2/6 = 0,333$
- Τένις:  $1/5 = 0,2$  και επομένως  $0,333 > 0,2$
- Λαστιχένιες:  $3/4 = 0,75$  και επομένως  $0,333 < 0,75$ . Άρα πληρούνται όλες οι προϋποθέσεις του προβλήματος.

- $y = 2$ :

$$\max(10 - 4, 2,4) = 6$$

$\min(6, 5) = 5$  και επομένως δεν υπάρχει λύση

- $y = 3$ :

$$\max(15 - 4, 3,6) = 11$$

$\min(6, 7,5) = 6$  που είναι αδύνατον

Άρα η μοναδική λύση είναι:

$$x = 2, y = 1, z = 3$$

Η πιθανότητα επομένως να τραβήξουμε μία ελαττωματική λαστιχένια μπάλα από το κουτί είναι:

$$P = \frac{z}{\text{συνολικές μπάλες}} = \frac{3}{6+5+4} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ ή } 20\%$$

**Σωστή απάντηση η Γ.**

### **ΑΣΚΗΣΗ 5**

Το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής, με τιμές στο διάστημα  $[\frac{1}{2}, \sqrt{2}]$ , δίνεται από τη συνάρτηση  $f$ , όπου  $f(x) + 2 \cdot f(\frac{1}{x}) = k \cdot x$ , με  $k > 0$  για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  του διαστήματος  $[\frac{1}{2}, \sqrt{2}]$ . Η επικρατούσα τιμή της κατανομής είναι:

**A. 0,50**

**B. 0,67**

**Γ. 1,33**

**Δ. 2,67**

**ΛΥΣΗ**

Αντικαθιστούμε  $x \rightarrow \frac{1}{x}$ :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = k \cdot \frac{1}{x}$$

Έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = kx \\ 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{k}{x} \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με 2:

$$2f(x) + 4f\left(\frac{1}{x}\right) = 2kx$$

Αφαιρούμε τη δεύτερη:

$$(2f(x) + 4f(1/x)) - (2f(x) + f(1/x)) = 2kx - \frac{k}{x} \quad 3f\left(\frac{1}{x}\right) = 2kx - \frac{k}{x} = k\left(2x - \frac{1}{x}\right)$$

Άρα:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{k}{3}\left(2x - \frac{1}{x}\right)$$

Από την πρώτη εξίσωση:

$$\begin{aligned} f(x) &= kx - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = kx - 2 \cdot \frac{k}{3}\left(2x - \frac{1}{x}\right) = kx - \frac{2k}{3}\left(2x - \frac{1}{x}\right) = kx - \frac{4k}{3}x + \frac{2k}{3x} \\ &= k\left(x - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3x}\right) \end{aligned}$$

Απλοποιώντας:

$$f(x) = k \left( \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3x} \right) = \frac{k}{3} \left( -x + \frac{2}{x} \right)$$

Η  $f(x)$  είναι:

$$f(x) = \frac{k}{3} \left( -x + \frac{2}{x} \right), x \in \left[ \frac{1}{2}, \sqrt{2} \right]$$

Παίρνουμε την παράγωγο:

$$f'(x) = \frac{k}{3} \left( -1 - \frac{2}{x^2} \right)$$

- Το  $-1 - \frac{2}{x^2} < 0$  για κάθε  $x > 0$ .
- Άρα  $f'(x) < 0$  σε όλο το διάστημα.
- Η  $f(x)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση.
- $k > 0$ .

Η  $f(x)$  έχει μέγιστο στο αριστερό άκρο του διαστήματος. Άρα επικρατούσα τιμή  $= \frac{1}{2}$ .

**Σωστή απάντηση η Α.**

## **ΑΣΚΗΣΗ 6**

Ένα κατάστημα πουλάει τρεις τύπους προϊόντων, στυλό, μολύβια και τετράδια. Σε μια έρευνα για τον έλεγχο των πωλήσεων κάθε προϊόντος του καταστήματος, διαπιστώθηκε ότι ο αριθμός των ατόμων που αγόρασαν μόνο στυλό, μόνο μολύβια και μόνο τετράδια είναι όροι αριθμητικής προόδου, χωρίς συγκεκριμένη σειρά. Ομοίως, ο αριθμός των ατόμων που αγόρασαν δύο από τα τρία προϊόντα είναι επίσης όροι αριθμητικής προόδου.

Επίσης, διαπιστώθηκε ότι ο αριθμός των ατόμων που αγόρασαν και τα τρία προϊόντα αποτελεί το  $\frac{1}{20}$  του αριθμού των ατόμων που αγόρασαν μόνο μολύβια, ο οποίος με τη σειρά του είναι ίσος με το μισό του αριθμού των ατόμων που αγόρασαν μόνο τετράδια. Ο αριθμός των ατόμων που

αγόρασαν και στυλό και μολύβια είναι 15, ενώ ο αριθμός αυτών που αγόρασαν μολύβια και τετράδια είναι 19. Ο αριθμός των ατόμων που αγόρασαν τετράδια είναι 120, που είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό αυτών που αγόρασαν στυλό (ο οποίος είναι διψήφιος και μεγαλύτερος του 50).

Εάν επιλέξουμε τυχαία έναν πελάτη, η πιθανότητα να έχει αγοράσει αυτός στυλό και τετράδιο είναι:

A. 8,38%

B. 9,01%

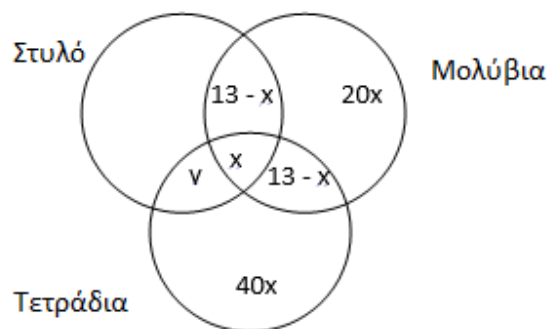
Γ. 10,67%

Δ. 13,46%

### ΛΥΣΗ

Έστω ότι ο αριθμός των ατόμων που αγόρασαν και τα τρία προϊόντα είναι  $x$ , και ο αριθμός των ατόμων που αγόρασαν στυλό και τετράδιο είναι  $y$ . Τότε, ο αριθμός των ατόμων που αγόρασαν μόνο μολύβι είναι  $20x$ , και όσοι αγόρασαν μόνο τετράδιο είναι  $40x$ .

Δημιουργούμε το παρακάτω διάγραμμα Venn.



Από το παραπάνω σχήμα παίρνουμε:

$$40x + (19 - x) + x + y = 120,$$

δηλαδή:

$$40x + y = 101$$

Τώρα, αν εξετάσουμε προσεκτικά την εξίσωση, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η τιμή του  $x$  μπορεί να είναι είτε 1 είτε 2.

Αν θέσουμε  $x = 1$  στην εξίσωση, παίρνουμε  $y = 61$ . Όμως, πρέπει επίσης να ικανοποιηθεί η επιπλέον συνθήκη ότι τα  $15 - x$ ,  $19 - x$  και  $y$  να είναι όροι αριθμητικής προόδου, κάτι που δεν είναι δυνατόν σε αυτή την περίπτωση. Επομένως, η τιμή  $x = 1$  απορρίπτεται.

Άρα, η τιμή του  $x$  είναι 2, οπότε παίρνουμε  $y = 21$ .

Τώρα, αν δούμε ξανά το σχήμα, παρατηρούμε ότι οι μόνες τιμές που μπορεί να λάβει το «μόνο στυλό» είναι 0, 60 ή 120. Και καθώς η τιμή αυτή δεν μπορεί να είναι μικρότερη του 50 (όπως αναφέρεται στο πρόβλημα), η μόνη τιμή που μπορεί να πάρει το «μόνο στυλό» είναι 60.

Άρα:

1. Ο συνολικός αριθμός των ατόμων που επισκέφθηκαν το κατάστημα είναι:  
 $60 + 13 + 2 + 40 + 17 + 80 + 21 = 233$ .
2. Ο αριθμός των ατόμων που αγόρασαν στυλό και τετράδιο είναι 21.

Η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι  $p = 21/233 = 0,0901$  ή 9,01%.

**Σωστή απάντηση η Β.**

### **Υποσημείωση:**

Η ερώτηση έπρεπε να ζητά «**στυλό και τετράδιο**», για να προκύψει η σωστή ανάμεσα στις προτεινόμενες απαντήσεις.

Δεδομένου του λάθους στη διατύπωση, η συγκεκριμένη ερώτηση σε όσες ομάδες κλήθηκαν να την απαντήσουν, **δεν μετρά στη συνολική βαθμολογία τους.**

### **ΑΣΚΗΣΗ 7**

Σε ένα πρωτάθλημα ποδοσφαίρου, κάθε ομάδα έπαιζε ακριβώς ένα παιχνίδι εναντίον καθεμίας από τις άλλες ομάδες. Σε κάθε παιχνίδι, η νικήτρια ομάδα κέρδιζε 3 βαθμούς, η ηττημένη δεν έπαιρνε καθόλου βαθμούς και καθεμία από τις δύο ομάδες κέρδιζε από έναν βαθμό σε περίπτωση ισοπαλίας. Μετά την ολοκλήρωση του πρωταθλήματος, διαπιστώθηκε ότι ακριβώς το 75% των συνολικών βαθμών που κέρδισε καθεμία από τις συμμετέχουσες ομάδες κερδήθηκε σε παιχνίδια εναντίον των δέκα ομάδων με τον μικρότερο αριθμό βαθμών.

(Πιο αναλυτικά, καθεμία από τις δέκα ασθενέστερες ομάδες με τη χαμηλότερη βαθμολογία κέρδισε το 75% των συνολικών βαθμών της στα παιχνίδια εναντίον των άλλων εννέα από τις δέκα. Το ίδιο ποσοστό βαθμών, 75%, κέρδισε καθεμία από τις δυνατές ομάδες στα παιχνίδια εναντίον των δέκα ασθενέστερων ομάδων και το 25% των συνολικών βαθμών της το κέρδισε στα παιχνίδια με όλες τις υπόλοιπες δυνατές ομάδες.)

Υποθέτουμε επίσης ότι, από τα παιχνίδια που διεξήχθησαν α) μεταξύ όλων των ομάδων, β) μεταξύ των δυνατών ομάδων και γ) μεταξύ των ασθενέστερων ομάδων, το 60% κατέληξε σε νίκη και το 40% σε ισοπαλία. Ο συνολικός αριθμός ομάδων στο πρωτάθλημα ήταν:

A. 14

**B. 16**

Γ. 18

Δ. 20

### ΛΥΣΗ

Ας υποθέσουμε ότι συνολικά  $v$  ομάδες συμμετείχαν στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου. Για τους βαθμούς που συγκέντρωσαν θα δημιουργήσουμε δύο εκφράσεις σε  $v$ : μία λαμβάνοντας υπόψη τον συνολικό αριθμό βαθμών που συγκέντρωσαν όλες οι ομάδες, και μία λαμβάνοντας υπόψη τον αριθμό βαθμών που συγκέντρωσαν ξεχωριστά οι 10 πιο αδύνατες ομάδες (10 συμμετέχουσες με τη χαμηλότερη βαθμολογία) και αυτούς που συγκέντρωσαν οι πιο δυνατές (υπόλοιπες  $v - 10$  συμμετέχουσες).

Για να λάβουμε τις επιθυμητές εκφράσεις, θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι εάν οι  $v$  ομάδες έπαιξαν η μία εναντίον της άλλης, τότε έπαιξαν συνολικά  $v \cdot (v - 1) / 2$  παιχνίδια, εκ των οποίων το 60% έχει νικητή και δίνει 3 βαθμούς στη νικήτρια και το 40% καταλήγει σε ισοπαλία και δίνει από 1 βαθμό στις δύο ισόπαλες ομάδες, με αποτέλεσμα ένα άθροισμα:

$3 \cdot (0,6) \cdot v(v - 1) / 2 + 2 \cdot (0,4) \cdot v(v - 1) / 2 = (1,3) \cdot v(v - 1)$  βαθμών που θα συγκεντρώσουν συνολικά [Σχ.1]

Οι 10 πιο αδύνατες ομάδες έδωσαν μεταξύ τους  $10 \cdot (10 - 1) / 2 = 45$  παιχνίδια, εκ των οποίων το 60%  $[(0,6) \cdot 45 = 27$  παιχνίδια] κατέληξαν σε νίκη και συγκεντρώθηκαν  $27 \cdot 3 = 81$  βαθμοί, και το υπόλοιπο 40%  $[(0,4) \cdot 45 = 18$  παιχνίδια] έληξαν ισόπαλα και συγκεντρώθηκαν  $18 \cdot 2 = 36$  βαθμοί, δηλαδή συγκεντρώθηκαν στα 45 παιχνίδια μεταξύ των 10 αδύνατων ομάδων συνολικά:  $81 + 36 = 117$  ή  $3 \cdot 39 = 3 \cdot (1,3) \cdot 30$  βαθμοί.

Ομοίως, οι  $v - 10$  πιο δυνατές ομάδες έδωσαν  $(v - 10)(v - 11) / 2$  παιχνίδια μεταξύ τους, εκ των οποίων το 60% έχει νικητή και δίνει 3 βαθμούς στη νικήτρια και το 40% καταλήγει σε ισοπαλία και δίνει από 1 βαθμό στις δύο ισόπαλες ομάδες, με αποτέλεσμα ένα άθροισμα:  $3 \cdot (0,6) \cdot (v - 10)(v - 11) / 2 + 2 \cdot (0,4) \cdot (v - 10)(v - 11) / 2 = (1,3) \cdot (v - 10)(v - 11)$  βαθμών που θα συγκεντρώσουν οι  $v - 10$  δυνατές ομάδες στα μεταξύ τους παιχνίδια.

Επιπροσθέτως, οι 10 αδύνατες ομάδες θα διασταυρωθούν με τις  $v - 10$  δυνατές ομάδες σε  $10 \cdot (v - 10)$  παιχνίδια και βάσει της υπόθεσης ότι κάθε ομάδα συγκεντρώνει τα  $\frac{3}{4} = 75\%$  των βαθμών της εναντίον των δέκα αδύνατων ομάδων με τον μικρότερο αριθμό βαθμών προκύπτει ότι:

- οι δυνατές ομάδες στους αγώνες τους με τις 10 αδύνατες κερδίζουν επιπλέον  $3 \cdot (1,3) \cdot (v - 10)(v - 11)$  βαθμούς
- οι αδύνατες ομάδες στους αγώνες τους με τις  $v - 10$  δυνατές κερδίζουν επιπλέον  $(1/3) \cdot 117 = (1/3) \cdot 3 \cdot 39 = 39 = (1,3) \cdot 30$  βαθμούς

Συνολικά οι δυνατές και οι αδύνατες ομάδες συγκεντρώνουν στο σύνολο όλων των παιχνιδιών:  $4 \cdot (1,3) \cdot (v - 10)(v - 11) + 4 \cdot (1,3) \cdot 30$  βαθμούς [Σχ.2].

Από τις [Σχ.1] & [Σχ.2] καταρτίζουμε την εξίσωση:  $(1,3) \cdot v(v - 1) = 4 \cdot (1,3) \cdot (v - 10)(v - 11) + 4 \cdot (1,3) \cdot 30$   
 $\Leftrightarrow v(v - 1) = 4 \cdot (v - 10)(v - 11) + 4 \cdot 30$ , η οποία ισοδυναμεί με  $3 \cdot v^2 - 83 \cdot v + 560 = 0$ .

Η δευτεροβάθμια αυτή εξίσωση έχει δύο λύσεις:  $v = 16$  και  $v = 35/3 = 11,667$

Κρατάμε την 1η λύση, που είναι ακέραια, δηλαδή  $v = 16$  συμμετέχουσες ομάδες στο πρωτάθλημα.

Επαλήθευση ότι υπάρχει τέτοιο πρωτάθλημα:

Εφόσον  $n = 16$ , διακρίνουμε τις συμμετέχουσες ομάδες σε 6 δυνατές ομάδες και 10 αδύνατες.

Οι ομάδες παίζουν συνολικά  $16 \cdot (16 - 1) / 2 = 120$  παιχνίδια, από τα οποία οι δυνατές δίνουν μεταξύ τους  $6 \cdot (6 - 1) / 2 = 15$  παιχνίδια, οι 10 αδύνατες δίνουν  $10 \cdot (10 - 1) / 2 = 45$  παιχνίδια και τα υπόλοιπα  $10 \cdot (16 - 10) = 60$  δίνονται μεταξύ δυνατών και αδύνατων ομάδων.

Βάσει υπόθεσης, το 60% των παιχνιδιών καταλήγει σε νίκη μίας εκ των δύο ομάδων, ενώ στο 40% των παιχνιδιών σημειώνεται ισοπαλία, οπότε:

- στα 15 παιχνίδια ανάμεσα στις δυνατές σημειώνονται 9 νίκες και 6 ισοπαλίες (συγκεντρώνονται συνολικά  $9 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 39$  βαθμοί σε αυτά τα 15 παιχνίδια)
- στα 45 παιχνίδια ανάμεσα στις αδύνατες σημειώνονται 27 νίκες και 18 ισοπαλίες (συγκεντρώνονται συνολικά  $27 \cdot 3 + 18 \cdot 2 = 117$  βαθμοί σε αυτά τα 45 παιχνίδια)
- στα 60 παιχνίδια μεταξύ δυνατών και αδύνατων σημειώνονται 36 νίκες και 24 ισοπαλίες (συγκεντρώνονται συνολικά  $36 \cdot 3 + 24 \cdot 2 = 156$  βαθμοί σε αυτά τα 60 παιχνίδια, από τους οποίους οι δυνατές ομάδες συγκεντρώνουν επιπλέον  $3 \cdot 39 = 117$  –τριπλάσιους δηλαδή παίζοντας με αδύνατες–, και οι αδύνατες συγκεντρώνουν επιπλέον  $(1/3) \cdot 117 = 39$  παίζοντας με δυνατές)

Επομένως, όλες οι ομάδες (δυνατές και αδύνατες) συγκεντρώνουν ακριβώς το 75% των συνολικών βαθμών τους παίζοντας με τις 10 πιο αδύνατες ομάδες, που συγκέντρωσαν δηλαδή τη χαμηλότερη βαθμολογία, όπως απαιτείται από το πρόβλημα.

**Σωστή απάντηση η Β.**

**ΑΣΚΗΣΗ 8**

Μια στατιστική έρευνα για τους μαθητές της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης της υπαίθρου πραγματοποιήθηκε σε έναν αριθμό χωριών μιας χώρας που εκτείνονταν σε τρεις γεωγραφικές περιοχές, τη Βορειοανατολική (ΒΑ), τη Δυτική (Δ) και τη Νότια (Ν). Από τα 150 χωριά της ΒΑ περιοχής, τα 250 χωριά της Δ και τα 200 χωριά της Ν περιοχής επιλέχθηκαν δείγματα 50 παιδιών ηλικίας από 6 έως 10 ετών.

Διαπιστώθηκε ότι από τα 30.000 παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα, το 55% αυτών φοιτούσε σε δημόσια δημοτικά σχολεία (Δ), το 37% σε ιδιωτικά σχολεία (Ι), ενώ το υπόλοιπο 8% δεν πήγαινε καθόλου σχολείο (Ο).

Τα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα χωρίστηκαν περαιτέρω σε δύο ομάδες, με βάση το αν οι μητέρες τους εγκατέλειψαν το σχολείο πριν ολοκληρώσουν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση ή όχι. Ο παρακάτω πίνακας μας παρουσιάζει τον αριθμό των παιδιών στους τρεις διαφορετικούς τύπους σχολείων για την περίπτωση που οι μητέρες τους εγκατέλειψαν το σχολείο πριν ολοκληρώσουν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση:

	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
ΒΑ	4.200	500	300	5.000
Δ	4.200	1.900	1.200	7.300
Ν	5.100	300	300	5.700
Σύνολο	13.500	2.700	1.800	18.000

Είναι επίσης γνωστό ότι:

7. Στη Νότια περιοχή (Ν), το 60% των παιδιών που συμμετείχαν στην έρευνα φοιτούσε σε δημόσια σχολεία (Δ). Επιπλέον, στη Νότια περιοχή (Ν), όλα τα παιδιά των οποίων οι μητέρες είχαν ολοκληρώσει την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, φοιτούσαν σε κάποιο σχολείο.
8. Στη Βορειοανατολική περιοχή (ΒΑ), μεταξύ των παιδιών που δεν πήγαιναν σχολείο (Ο), το 50% είχε μητέρες που είχαν εγκαταλείψει το σχολείο πριν ολοκληρώσουν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση.
9. Ο αριθμός των παιδιών σε δημόσια σχολεία (Δ) στη ΒΑ περιοχή ήταν ίσος με τον αριθμό των παιδιών σε δημόσια σχολεία (Δ) στη Δυτική περιοχή (Δ).

Σε μια επαναληπτική έρευνα στα ίδια παιδιά, δύο χρόνια αργότερα, διαπιστώθηκε ότι πλέον όλα τα παιδιά φοιτούσαν σε κάποιο σχολείο. Από τα παιδιά που προηγουμένως δεν πήγαιναν σχολείο, σε μία περιοχή το 25% αυτών φοιτούσε τώρα σε δημόσιο σχολείο (Δ), ενώ τα υπόλοιπα είχαν εγγραφεί σε ιδιωτικό σχολείο (Ι). Στη δεύτερη περιοχή, όλα αυτά τα παιδιά φοιτούσαν τώρα σε δημόσιο σχολείο (Δ). Στην τρίτη περιοχή, το 50% αυτών των παιδιών είχε εγγραφεί τώρα σε δημόσιο σχολείο (Δ), ενώ τα υπόλοιπα σε ιδιωτικό σχολείο (Ι).

Ως αποτέλεσμα, και στις τρεις περιοχές συνολικά, το 50% των παιδιών που προηγουμένως δεν πήγαιναν σχολείο είχε πλέον εγγραφεί σε δημόσιο σχολείο (Δ). Επίσης, παρατηρήθηκε ότι κανένα από τα παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα δεν είχε αλλάξει σχολείο.

Η πιθανότητα να επιλέξουμε μαθητή της Νότιας περιοχής (N), του οποίου η μητέρα είχε εγκαταλείψει το σχολείο πριν ολοκληρώσει την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, και τώρα το παιδί φοιτά σε δημόσιο σχολείο (Δ) είναι:

A. 89,3%

B. 91,7%

Γ. 92,1%

**Δ. 94,7%**

#### **ΛΥΣΗ**

Γνωρίζουμε την κατανομή των παιδιών σε Δ Σχολεία, Ι Σχολεία και στην ομάδα Ο για τις μητέρες που εγκατέλειψαν το σχολείο πριν ολοκληρώσουν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση. Αν μπορούσαμε να συμπληρώσουμε έναν παρόμοιο πίνακα για τις μητέρες που ολοκλήρωσαν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση, αυτό θα ήταν πολύ χρήσιμο. Γνωρίζουμε τους συνολικούς αριθμούς και έτσι μπορούμε να συμπληρώσουμε τα κενά.

Γνωρίζουμε ότι:

Μητέρες που εγκατέλειψαν	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
ΒΑ	4.200	500	300	5.000
Δ	4.200	1.900	1.200	7.300
N	5.100	300	300	5.700
Σύνολο	13.500	2.700	1.800	18.000

Ο συνολικός πίνακας θα είναι:

Συνολικός Πίνακας	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
BA				7.500
Δ				12.500
N				10.000
Σύνολο	16.500	11.100	2.400	30.000

Τώρα μπορούμε να δημιουργήσουμε τον παρακάτω πίνακα:

Μητέρες που ολοκλήρωσαν	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
BA				2.500
Δ				5.200
N				4.300
Σύνολο	3.000	8.400	600	12.000

Στη Νότια περιοχή (N), συνολικά 6.000 μαθητές φοιτούσαν σε δημόσια σχολεία (Δ). Από αυτούς, οι 5.100 είναι από μητέρες που είχαν εγκαταλείψει το σχολείο. Άρα, οι μαθητές σε δημόσια σχολεία με μητέρες που ολοκλήρωσαν την πρωτοβάθμια εκπαίδευση θα πρέπει να είναι 900. Και η ομάδα «Δεν πηγαίνουν σχολείο» (Ο) στον πίνακα θα πρέπει να είναι 0. Άρα:

Μητέρες που ολοκλήρωσαν	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
BA				2.500
Δ				5.200
N	900	3.400	0	4.300
Σύνολο	3.000	8.400	600	12.000

Το πεδίο BA-O θα πρέπει να είναι ίδιο και στους πίνακες «Μητέρα που εγκατέλειψε» και «Μητέρα που ολοκλήρωσε». Δηλαδή, το BA-O στον πίνακα θα πρέπει να είναι 300. Αυτό μας δίνει επίσης την τιμή για το Δ-O στον πίνακα.

Μητέρες που ολοκλήρωσαν	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
BA			300	2.500
Δ			300	5.200
N	900	3.400	0	4.300
Σύνολο	3.000	8.400	600	12.000

Το Δ στη Βορειοανατολική (ΒΑ) και το Δ στη Δυτική (Δ) περιοχή, και στις δύο περιπτώσεις για τις μητέρες που εγκατέλειψαν το σχολείο, είναι 4.200 η καθεμία. Επομένως, το Δ στη ΒΑ και το Δ στη Δ περιοχή θα πρέπει επίσης να είναι ίσα μεταξύ τους. Αυτά τα δύο κελιά θα πρέπει να είναι 1.050.

Άρα:

Μητέρες που ολοκλήρωσαν	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
ΒΑ	1.050		300	2.500
Δ	1.050		300	5.200
Ν	900	3.400	0	4.300
Σύνολο	3.000	8.400	600	12.000

Συνεπώς:

Μητέρες που ολοκλήρωσαν	Δ	Ι	Ο	Σύνολο
ΒΑ	1.050	1.150	300	2.500
Δ	1.050	3.850	300	5.200
Ν	900	3.400	0	4.300
Σύνολο	3.000	8.400	600	12.000

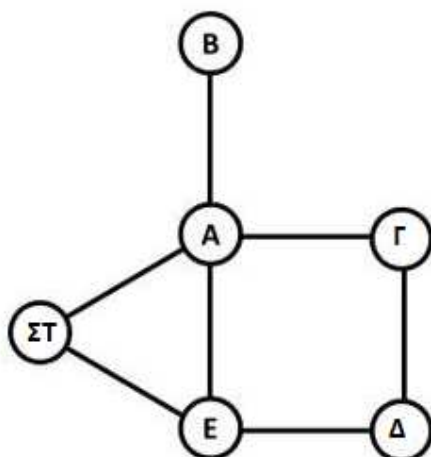
Άρα, τα 300 παιδιά που ήταν στην ομάδα Ο αρχικά, τώρα έχουν μετακινηθεί στο Δ. Δηλαδή, το Δ τώρα ανέρχεται σε 5.400.

Το ζητούμενο ποσοστό είναι  $5.400/5.700 \times 100 = 94,7\%$ .

**Σωστή απάντηση η Δ.**

## ΑΣΚΗΣΗ 9

A, B, Γ, Δ, E και ΣΤ είναι έξι Αστυνομικά Τμήματα σε μια περιοχή, τα οποία συνδέονται με δρόμους όπως φαίνεται παρακάτω. Τέσσερις ομάδες –Ομάδα 1, Ομάδα 2, Ομάδα 3 και Ομάδα 4– περιπολούν συνεχώς στους δρόμους αυτούς από τις 09:00 το πρωί έως τις 12:00 το μεσημέρι κάθε μέρα.



Οι ομάδες χρειάζονται 30 λεπτά για να διασχίσουν έναν δρόμο που συνδέει ένα Αστυνομικό Τμήμα με ένα άλλο. Και οι τέσσερις ομάδες ξεκινούν από το Τμήμα A στις 09:00 και πρέπει να επιστρέψουν στο Τμήμα A έως τις 12:00. Μπορούν επίσης να περάσουν από το Τμήμα A οποιαδήποτε στιγμή κατά τη διάρκεια της διαδρομής τους.

Γνωρίζουμε τα εξής:

1. Κανένας δρόμος δεν διασχίζεται από περισσότερες από μία ομάδες προς οποιαδήποτε κατεύθυνση την ίδια χρονική στιγμή.
2. Οι Ομάδες 2 και 3 είναι οι μόνες που βρίσκονται στα Τμήματα E και Δ, αντίστοιχα, στις 10:00.
3. Οι Ομάδες 1 και 3 είναι οι μόνες που βρίσκονται στο Τμήμα E στις 10:30.
4. Οι Ομάδες 1 και 4 είναι οι μόνες που βρίσκονται στα Τμήματα B και E, αντίστοιχα, στις 11:30.
5. Οι Ομάδες 1 και 4 είναι οι μόνες ομάδες που περιπολούν τον δρόμο που συνδέει τα Τμήματα A και E.
6. Η Ομάδα 4 δεν περνάει ποτέ από τα Τμήματα B, Δ ή ΣΤ.

Με βάση τα παραπάνω δεδομένα, η πιθανότητα να περάσουν από το Τμήμα Γ δύο ομάδες περιπολίας είναι:

A. 25%

B. 50%

Γ. 75%

Δ. 100%

### ΛΥΣΗ

Ας προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε βήμα-βήμα τα δεδομένα του προβλήματος.

Δεδομένου ότι τέσσερις ομάδες –Ομάδα 1, Ομάδα 2, Ομάδα 3 και Ομάδα 4– περιπολούν συνεχώς στους δρόμους αυτούς από τις 09:00 το πρωί έως τις 12:00 το μεσημέρι, αντιλαμβανόμαστε ότι κάθε ομάδα θα πρέπει να πραγματοποιήσει 6 περιπολίες των 30 λεπτών η καθεμία ξεκινώντας από το Τμήμα Α.

Οι ομάδες 2 και 3 είναι οι ομάδες που βρίσκονται στα Τμήματα Ε και Δ, αντίστοιχα, στις 10.00 το πρωί. Αυτές οι δύο ομάδες έφτασαν εκεί ακολουθώντας τις διαδρομές:

Η 2 τη διαδρομή  $A \rightarrow \Sigma\Gamma \rightarrow E$  και η 3 τη διαδρομή  $A \rightarrow E \rightarrow \Delta$  ή  $A \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta$ . Δεδομένου όμως ότι οι ομάδες 1 και 4 περιπολούν τη διαδρομή ΑΕ, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τελικά η ομάδα 2 έκανε τη διαδρομή  $A \rightarrow \Sigma\Gamma \rightarrow E$  και η ομάδα 3 έκανε τη διαδρομή  $A \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta$ . Έχουμε επομένως τον παρακάτω πίνακα:

	9:00 π.μ.	9:30 π.μ.	10:00 π.μ.	10:30 π.μ.	11:00 π.μ.	11:30 π.μ.	12:00
<b>Ομάδα 1</b>	A						A
<b>Ομάδα 2</b>	A	ΣΤ	E				A
<b>Ομάδα 3</b>	A	Γ	Δ				A
<b>Ομάδα 4</b>	A						A

Από τον συνδυασμό των δεδομένων 3 και 4, ο πίνακάς μας γίνεται:

	9:00 π.μ.	9:30 π.μ.	10:00 π.μ.	10:30 π.μ.	11:00 π.μ.	11:30 π.μ.	12:00
<b>Ομάδα 1</b>	A			E		B	A
<b>Ομάδα 2</b>	A	ΣΤ	E				A
<b>Ομάδα 3</b>	A	Γ	Δ	E			A
<b>Ομάδα 4</b>	A					E	A

Με το δεδομένο 6 η ομάδα 4 περιπολεί μόνο μεταξύ  $A \rightarrow \Gamma$  και  $A \rightarrow E$  και με βάση το δεδομένο 1 ο πίνακας γίνεται:

	9:00 π.μ.	9:30 π.μ.	10:00 π.μ.	10:30 π.μ.	11:00 π.μ.	11:30 π.μ.	12:00
<b>Ομάδα 1</b>	A	B	A	E	A	B	A
<b>Ομάδα 2</b>	A	ΣΤ	E	ΣΤ			A
<b>Ομάδα 3</b>	A	Γ	Δ	E			A
<b>Ομάδα 4</b>	A	E	A	Γ	A	E	A

Αν τώρα αξιοποιήσουμε το δεδομένο 1 σε συνδυασμό με τα δεδομένα του πίνακα, τελικά ο πίνακας συμπληρώνεται πλήρως ως εξής:

	9:00 π.μ.	9:30 π.μ.	10:00 π.μ.	10:30 π.μ.	11:00 π.μ.	11:30 π.μ.	12:00
Ομάδα 1	A	B	A	E	A	B	A
Ομάδα 2	A	ΣΤ	E	ΣΤ	A/E	ΣΤ	A
Ομάδα 3	A	Γ	Δ	E	Δ	Γ	A
Ομάδα 4	A	E	A	Γ	A	E	A

Από τον πίνακα διακρίνουμε ότι 2 ομάδες από τις 4 πέρασαν από το Τμήμα Γ.

**Σωστή απάντηση η Δ.**

### **ΑΣΚΗΣΗ 10**

Το Τμήμα Ανάλυσης Δεδομένων μιας μεγάλης πολυεθνικής εταιρείας συνέλεξε και ανέλυσε τα δεδομένα 200 εταιρειών από την περσινή διαφημιστική τους καμπάνια προκειμένου να προτείνει στο Τμήμα Μάρκετινγκ τη διαφημιστική πολιτική του επόμενου έτους. Συγκεκριμένα, μελέτησε τα ετήσια συνολικά ποσά των πωλήσεων (σε χιλιάδες ευρώ) διαφόρων εταιρειών, και τα συνολικά ποσά που ξόδεψαν οι εταιρείες αυτές (σε χιλιάδες ευρώ) για τις διαφημιστικές τους καμπάνιες στην τηλεόραση, στο ραδιόφωνο και στις εφημερίδες. Ο παρακάτω πίνακας μας παρουσιάζει τα περιγραφικά στοιχεία που προέκυψαν από την ανάλυση των ποσών, σε χιλιάδες ευρώ, που δαπανήθηκαν από τις εταιρείες για κάθε είδος διαφημιστικής καμπάνιας, καθώς και των πωλήσεων που οι εταιρείες πραγματοποίησαν.

### ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

	Τηλεόραση	Ραδιόφωνο	Εφημερίδες	Πωλήσεις
Τυπική απόκλιση	85,85424	14,84681	21,77862	5,28389
Ελάχιστη τιμή	0,70	0,00	0,30	1,60
Μέγιστη τιμή	296,40	49,60	114,00	27,00
Άθροισμα	29.408,50	4.652,80	6.110,10	3.026,10

Επίσης, ο παρακάτω πίνακας μας παρουσιάζει τα αποτελέσματα των γραμμικών συσχετίσεων μεταξύ των συνολικών πωλήσεων των εταιρειών και του είδους της διαφημιστικής δαπάνης που πραγματοποίησαν.

### ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ PEARSON ( r )

	Τηλεόραση	Ραδιόφωνο	Εφημερίδες
Πωλήσεις	0,901	0,350	0,158

Η απόφαση του Τμήματος Μάρκετινγκ είναι να χρησιμοποιήσει το μέγιστο δυνατό ποσό βάσει των παραπάνω πινάκων με τον πιο αποδοτικό τρόπο. Εάν η πολυεθνική εταιρεία ακολουθήσει αυτήν την πολιτική, οι πωλήσεις της το επόμενο έτος αναμένεται να ανέλθουν περίπου σε:

**A. 23.427 ευρώ**

**B. 21.315 ευρώ**

**Γ. 22.753 ευρώ**

**Δ. 24.617 ευρώ**

### ΛΥΣΗ

Δύο είναι τα βασικά ερωτήματα τα οποία θα πρέπει να απαντηθούν.

1. Ποιο είναι το ποσό που θα πρέπει να δαπανηθεί στη διαφημιστική καμπάνια της πολυεθνικής εταιρείας και πώς αυτό θα πρέπει να διανεμηθεί μεταξύ Τηλεόρασης, Ραδιοφώνου και Εφημερίδων.
2. Βάσει ποιου μαθηματικού μοντέλου θα γίνει η παραπάνω πρόβλεψη.

Παρατηρώντας προσεκτικά τον πίνακα των συσχετίσεων διακρίνουμε ότι οι συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των μεταβλητών Πωλήσεις - Τηλεόραση, Πωλήσεις - Ραδιόφωνο και Πωλήσεις - Εφημερίδες είναι 0,901, 0,350 και 0,158 αντίστοιχα, τιμές που μας βοηθούν να καταλήξουμε στη διαπίστωση ότι υπάρχει μια πολύ ισχυρή γραμμική συσχέτιση μεταξύ των αριθμό των πωλήσεων και της τηλεοπτικής διαφημιστικής καμπάνιας, γεγονός που ισχυροποιεί το γεγονός ότι για να πετύχει η εταιρεία το μέγιστο αριθμό πωλήσεων θα πρέπει να προχωρήσει σε τηλεοπτική διαφημιστική καμπάνια. Συνεπώς, η καλύτερη πολιτική είναι να θεωρήσουμε με βάση τα δεδομένα μας ένα μοντέλο γραμμικής παλινδρόμησης με εξαρτημένη μεταβλητή τις πωλήσεις και ανεξάρτητη μεταβλητή την Τηλεόραση. Η ευθεία της γραμμικής παλινδρόμησης θα είναι της μορφής:

$$\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$$

Γνωρίζουμε όμως ότι ασφαλείς προβλέψεις μπορεί να γίνουν μόνο για τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής που βρίσκονται εντός του διαστήματος δημιουργίας του μοντέλου μας. Αυτό σημαίνει ότι το μεγαλύτερο ποσό που μπορεί να διαθέσει ασφαλώς η εταιρεία είναι 296.400 ευρώ και το ελάχιστο ποσό 700 ευρώ για την τηλεοπτική της διαφημιστική της καμπάνια.

Για τον υπολογισμό του μοντέλου μας ακολουθούμε την εξής διαδικασία.

Γνωρίζουμε ότι:

$$r = \hat{\beta} \frac{s_x}{s_y}$$

Από τον πίνακα των περιγραφικών στοιχείων έχουμε ότι:

$s_y = 5,28389$ ,  $s_x = 85,85424$  και  $r = 0,901$ . Άρα,  $\hat{\beta} = [(0,901)*(5,28389)]/85,85424 = 0,0555$

και

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$$

δηλ.  $\hat{\alpha} = (3.026,10/200) - 0,055 * (29.408,50/200) = 6,977$

Συνεπώς, η ευθεία της γραμμικής παλινδρόμησης θα είναι η:

$$\text{Πωλήσεις} = 6,977 + 0.0555 * \text{Τηλεόραση}.$$

Με βάση το παραπάνω μοντέλο, εάν η εταιρεία ξοδέψει 296.400 ευρώ για διαφημιστική καμπάνια στην τηλεόραση, τότε οι πωλήσεις της αναμένονται να είναι:  $6,977 + 0,0555 * (296,40) = 23,427$ , δηλ. περίπου 23.427 ευρώ.

**Σωστή απάντηση η Α.**

## **ΤΕΣΤ 2**

1. Σύμφωνα με τα στοιχεία της ΕΛΣΤΑΤ, πόσες ήταν οι καινούργιες μοτοσυκλέτες που κυκλοφόρησαν για πρώτη φορά στην Ελλάδα κατά το έτος 2024;

49.896

68.896

59.896

77.979

Στατιστικές - ELSTAT (statistics.gr) [Αυτοκίνητα και μοτοσυκλέτες, καινούρια και μεταχειρισμένα, που κυκλοφόρησαν για πρώτη φορά στην Ελλάδα :1985 - 2024](#)

2. Σύμφωνα με τα στοιχεία της ΕΛΣΤΑΤ, πόσες ήταν κατά το έτος 2024 οι διανυκτερεύσεις σε τουριστικά κάμπινγκ αλλοδαπών τουριστών που διαμένουν μόνιμα στη Βουλγαρία;

289.807

405.742

102.344

205.332

Στατιστικές - ELSTAT (statistics.gr) [06. Διανυκτερεύσεις αλλοδαπών στα καταλύματα ξενοδοχειακού τύπου, κάμπινγκ και καταλύματα σύντομης διαμονής](#)

3. Σύμφωνα με τα στοιχεία της ΕΛΣΤΑΤ, πόσο ήταν το κατώφλι κινδύνου φτώχειας (σε ευρώ) σε νοικοκυριά με δύο ενήλικες και δύο εξαρτώμενα παιδιά κάτω των 14 ετών, κατά το έτος 2024;

13.671

6.510

10.863

14.718

Στατιστικές - ELSTAT (statistics.gr) [02. Εισόδημα και Συνθήκες Διαβίωσης των Νοικοκυριών \(SILC\) - Δείκτες \(2011 - 2024](#)

4. Σύμφωνα με τα στοιχεία της ΕΛΣΤΑΤ, πόσες ήταν συνολικά οι νέες οικοδομές στον Δήμο Μυκόνου κατά το έτος 2024;

14  
89  
59  
149

Στατιστικές - ELSTAT (statistics.gr) ([25. Είδος οικοδομικών αδειών κατά Περιφέρεια, Περιφερειακή Ενότητα, Δήμο, Δημοτική-Τοπική Κοινότητα. \(Συγκεντρωτικό 2024](#)

5. Σύμφωνα με τα στοιχεία της ΕΛΣΤΑΤ, πόσα ήταν τα διαζύγια στην Ελλάδα κατά το έτος 2024;

15.532  
14.477  
12.962  
11.962

[01. Διαζύγια - Απόλυτοι αριθμοί και ποσοστά \(2024\)](#)

6. Σύμφωνα με τα στοιχεία της ΕΛΣΤΑΤ, πόση ήταν η παραγωγή γάλακτος προβάτων (σε τόνους) στην Περιφερειακή Ενότητα Αιτωλοακαρνανίας κατά το έτος 2023;

69.433  
97.242  
76.256  
672

Στατιστικές - ELSTAT (statistics.gr) ([07α. Παραγωγή γάλακτος, κατά Περιφέρεια και Περιφερειακή Ενότητα](#)

7. Σύμφωνα με τα στοιχεία της ΕΛΣΤΑΤ, πόσες ήταν οι πωλήσεις έντυπων οικονομικών εφημερίδων στην Ελλάδα κατά το έτος 2024;

208.189  
408.189  
608.189  
908.189

Στατιστικές - ELSTAT (statistics.gr) ([02. Πωλήσεις εφημερίδων κατά μήνα έτους](#)

8. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Eurostat, ποια χώρα της Ευρωπαϊκής Ένωσης (ΕΕ) είχε το μικρότερο ποσοστό ανεργίας κατά το πρώτο τρίμηνο του 2025;

Ουγγαρία  
Ρουμανία  
Τσεχία  
Γερμανία

[Unemployment rates by sex, age and citizenship](#) ( διαδικτυακός κωδικός δεδομένων: TEC00127 )

9. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Eurostat, ποια χώρα είχε τις περισσότερες αφίξεις σε τουριστικά καταλύματα κατά το έτος 2024;

Γαλλία

**Γερμανία**

Ισπανία

Ιταλία

[\[tour occ arnat\] Arrivals at tourist accommodation establishments](#)

10. Σύμφωνα με τα στοιχεία της Eurostat, ποια χώρα της Ευρωπαϊκής Ένωσης (ΕΕ) είχε τον υψηλότερο αριθμό θανάτων ανδρών από «τυχαίο πνιγμό και εμβύθιση» μέσα στη χώρα το έτος 2022;

**Γαλλία**

Γερμανία

Ισπανία

Πολωνία

[https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/hlth\\_cd\\_aro\\_custom\\_18502848/default/table](https://ec.europa.eu/eurostat/databrowser/view/hlth_cd_aro_custom_18502848/default/table)

## **ΤΕΣΤ 3**

1. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, για ποιο είδος διατροφής δαπανήθηκαν τα περισσότερα χρήματα από τα νοικοκυριά κατά το έτος 2024;

Λαχανικά

Φρούτα

**Κρέας**

Γαλακτοκομικά προϊόντα και αυγά

<https://www.statistics.gr/el/infographic-household-budget-survey-2024>

2. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, σε ποια ηλικία γέννησαν οι περισσότερες γυναίκες κατά το 2024;

20-24 ετών

25-29 ετών

**30-34 ετών**

35-39 ετών

<https://www.statistics.gr/el/infographic-vital-statistics-survey-2024>

3. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, ποιο μήνα του 2024 παρατηρήθηκαν τα περισσότερα κρούσματα SARS-CoV-2;

**Ιανουάριο**

Μάιο

Οκτώβριο

Δεκέμβριο

<https://www.statistics.gr/el/infographic-infectious-diseases-2024>

4. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, τι είδους ατομικές εκθέσεις πραγματοποιήθηκαν, ως επί το πλείστον, κατά το έτος 2024;

**Ζωγραφικής**

Γλυπτικής

Φωτογραφίας

Καμία από τις προτεινόμενες απαντήσεις

<https://www.statistics.gr/el/infographic-art-galleries-2024>

5. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, κατά το έτος 2024, το μεγαλύτερο ποσοστό του φτωχού πληθυσμού δεν είχε την οικονομική δυνατότητα να παρέχει στα παιδιά του:

**Τακτική συμμετοχή σε δραστηριότητες αναψυχής**

Μία εβδομάδα διακοπών

Διοργάνωση εκδηλώσεων, π.χ. για γενέθλια

Πρόσκληση φίλων στο σπίτι για φαγητό ή παιχνίδι

<https://www.statistics.gr/el/infographic-liv-cond-child-2024>

6. Σύμφωνα με infographic της ΕΛΣΤΑΤ, πόσοι γιατροί εργάζονταν στα νοσοκομεία της χώρας κατά το έτος 2023;

42.278

**25.204**

8.277

6.450

<https://www.statistics.gr/el/infographic-therap-census-2023>

7. Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat «Housing in Europe», έκδοσης 2023, σε ποια χώρα της Ευρωπαϊκής Ένωσης (ΕΕ) παρατηρείται το υψηλότερο ποσοστό ανθρώπων που έμεναν σε σπίτι με καθεστώς ενοικίασης, κατά το έτος 2022;

Ολλανδία

**Γερμανία**

Ελβετία

Δανία

<https://ec.europa.eu/eurostat/web/interactive-publications/housing-2023>

8. Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat «Housing in Europe», έκδοσης 2023, σε ποια χώρα της Ευρωπαϊκής Ένωσης (ΕΕ) καταγράφηκε ο μεγαλύτερος αριθμός δωματίων που αντιστοιχεί ανά άτομο, κατά το έτος 2022;

Λουξεμβούργο

Βέλγιο

Μάλτα

Κύπρος

<https://ec.europa.eu/eurostat/web/interactive-publications/housing-2023>

9. Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat «Housing in Europe», έκδοσης 2023, σε ποια χώρα της Ευρωπαϊκής Ένωσης (ΕΕ) σημειώθηκε η μικρότερη αύξηση στις τιμές των σπιτιών, το έτος 2023 σε σχέση με το έτος 2015 (έτος βάσης);

Ιταλία

Φινλανδία

Κύπρος

Ισπανία

<https://ec.europa.eu/eurostat/web/interactive-publications/housing-2023#housing-cost>

10. Σύμφωνα με το ψηφιακό δημοσίευμα της Eurostat «Housing in Europe», έκδοσης 2023, κατά το έτος 2023, σε ποια χώρα της Ευρωπαϊκής Ένωσης (ΕΕ) ήταν μεγαλύτερο το μερίδιο των ανθρώπων που έμεναν με καθεστώς υποθήκης στο σπίτι τους ή γενικά δεν μπορούσαν να αντεπεξέλθουν οικονομικά σε λογαριασμούς ενοικίου ή χρήσης σπιτιού;

Βουλγαρία

Ελλάδα

Τσεχία

Ρουμανία

<https://ec.europa.eu/eurostat/web/interactive-publications/housing-2023#housing-cost>