# Οι αριθμοί και η ζωή μας

ΤΕΥΧΟΣ IV

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΡΧΗ

**Συγγραφική Ομάδα**: Γεωργία Λύτρα (Ειδική Σύμβουλος – Αυτοτελές Γραφείο Προέδρου ΕΛΣΤΑΤ)
Μαρία Λαφτσίδου (Τμήμα Σύνθεσης Εθνικών Λογαριασμών, ΕΛΣΤΑΤ)

**Επιμέλεια Κειμένου**: Παναγιώτα Βαληνδρά, Γεωργία Δημητρακοπούλου, Κωνσταντίνος Καμπανάκης, Ελπινίκη Μωραΐτου
(Τμήμα Επιμέλειας Εκδόσεων και Μεταφράσεων, ΕΛΣΤΑΤ)

**Φωτοστοιχειοθεσία**: Διονύσης Καπότσης, Αικατερίνη Παπαβασιλείου
(Τμήμα Φωτοστοιχειοθεσίας και Τυπογραφικής Διαμόρφωσης Εκδόσεων, ΕΛΣΤΑΤ)

**Εκτυπωτικές και Βιβλιοδετικές Εργασίες**: Τμήμα Εκτυπώσεων, ΕΛΣΤΑΤ

**Έτος Έκδοσης**: 2022

Αγαπητή/έ αναγνώστρια/στη,

Βασικός μας στόχος στην Ελληνική Στατιστική Αρχή (ΕΛΣΤΑΤ) είναι η διάδοση και η προώθηση, σε στοχευμένες ομάδες (π.χ. μαθητές, φοιτητές), της αξίας των επίσημων στατιστικών, αλλά και η δημιουργία στατιστικής συνείδησης σε ολόκληρη την κοινωνία, μέσω της στρατηγικής και των δράσεών μας για την ανάπτυξη της «Στατιστικής Παιδείας» στην Ελλάδα.

Το τετράδιο ασκήσεων «Οι αριθμοί και η ζωή μας, Τεύχος IV», που κρατάτε στα χέρια σας, αποσκοπεί στην εξοικείωση των μαθητριών/τών με τις βασικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων και της στατιστικής, ενώ δίνει έμφαση στην ικανότητά τους να κατανοούν την έννοια της στατιστικής πληροφορίας και να τη χρησιμοποιούν με τρόπο ωφέλιμο για τη ζωή τους.

Εύχομαι να διασκεδάσετε μαθαίνοντας,

Αθανάσιος Κων. Θανόπουλος
Πρόεδρος της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής

# ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

# «ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ»

Το τετράδιο ασκήσεων «Οι αριθμοί και η ζωή μας, τεύχος IV» εντάσσεται στις δράσεις της στρατηγικής της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ) για την «Ανάπτυξη της Στατιστικής Παιδείας» στην Ελλάδα. Στόχος των δράσεων είναι να εισάγουν, με εκπαιδευτικό και ψυχαγωγικό χαρακτήρα, μαθητές/τριες και φοιτητές/τριες στον κόσμο της στατιστικής, βοηθώντας τους/τες να κατανοήσουν την εφαρμογή της στις καθημερινές τους συνήθειες. Στοχεύουν επίσης, στο να ενημερώσουν το ευρύ κοινό για τον ρόλο, τη χρήση και τον τρόπο παραγωγής, βάσει ευρωπαϊκών και διεθνών στατιστικών πρότυπων, των επίσημων στατιστικών.

Στο πρόγραμμα περιλαμβάνονται δράσεις, όπως διαγωνισμοί, εκπαιδευτικές επισκέψεις, η ένταξη του EMOS (European Master in Official Statistics) σε Τμήματα ελληνικών Πανεπιστημίων, διαδικτυακά εκπαιδευτικά παιχνίδια και πολλά άλλα.

Όραμά μας είναι η εξέλιξη και ανάπτυξη του προγράμματος, ώστε να οικοδομήσουμε στατιστική κατανόηση σε ολόκληρη την κοινωνία, διασφαλίζοντας ότι όλοι έχουμε τη δυνατότητα να κατανοούμε και να αξιοποιούμε πλήρως τα στατιστικά δεδομένα.

Όλες οι πληροφορίες και οι δράσεις για τη στρατηγική της ΕΛΣΤΑΤ για τη στατιστική παιδεία αναρτώνται στην ειδική ιστοσελίδα:

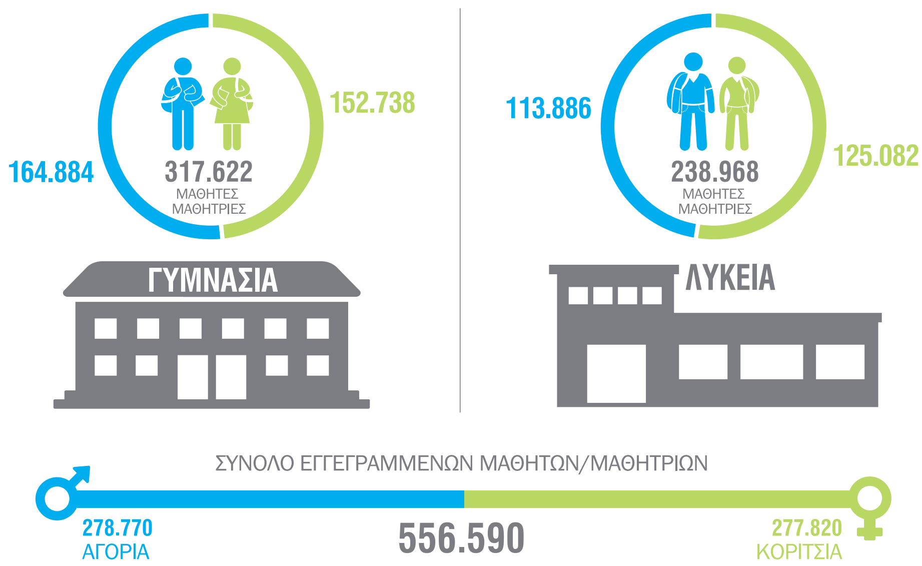

**Στατιστική Παιδεία**

Hellenic Statistical Authority | @StatisticsGR | ELSTAT | statistics.gr

# 1 ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΓΕΝΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Κάθε χρόνο η ΕΛΣΤΑΤ ανακοινώνει τα επίσημα στοιχεία που αφορούν στις στατιστικές Δευτεροβάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης (Γυμνάσια και Λύκεια). Τα στοιχεία του σχολικού έτους 2018/2019 παρουσιάζονται στο ακόλουθο infographic:

### ΓΥΜΝΑΣΙΑ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΑ ΛΥΚΕΙΑ 2018/2019




## 1.1 Πιθανότητες

Αν επιλέξουμε τυχαία ένα παιδί που φοιτά στη Β/βάθμια Γενική Εκπαίδευση, ποια είναι η πιθανότητα να είναι Αγόρι; Εννοείται ότι κάθε ένα από τα παιδιά έχει την ίδια πιθανότητα να επιλεγεί.

Ας συγκεντρώσουμε τα στοιχεία του infographic στον Πίνακα 1 «Δευτεροβάθμια Γενική Εκπαίδευση».

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1**

| Δευτεροβάθμια Γενική Εκπαίδευση | | | |
|---|---|---|---|
| | ΑΓΟΡΙΑ | ΚΟΡΙΤΣΙΑ | ΣΥΝΟΛΟ |
| ΓΥΜΝΑΣΙΑ | 164.884 | 152.738 | 317.622 |
| ΛΥΚΕΙΑ | 113.886 | 125.082 | 238.968 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 278.770 | 277.820 | 556.590 |

**Γ** το σύνολο των μαθητών/τριών Γυμνασίου

**Λ** το σύνολο των μαθητών/τριών Λυκείου

**Ω** το σύνολο αναφοράς ή ο δειγματικός χώρος που περιλαμβάνει όλους/ες τους/τις μαθητές/τριες της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης.

**Α** το σύνολο των μαθητών (Αγόρια)

**Κ** το σύνολο των μαθητριών (Κορίτσια)

Ενδεχόμενο είναι μια συλλογή από ένα ή περισσότερα αποτελέσματα / στοιχεία με κοινή ιδιότητα.

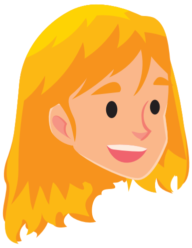
Συμβολίζουμε με:

- **A** το **ενδεχόμενο** που αποτελείται από τους μαθητές (Αγόρια) της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης,
- **P(A)** την **πιθανότητα** να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A, δηλαδή, ένα τυχαία επιλεγμένο παιδί της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης να είναι Αγόρι.

Η πιθανότητα που ζητάμε δίνεται από το πηλίκο:

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος αγοριών που φοιτούν στη Β/ βάθμια Γενική Εκπαίδευση}}{\text{πλήθος παιδιών που φοιτούν στη Β/ βάθμια Γενική Εκπαίδευση}} = \frac{278.770}{556.590} \approx 0{,}501 = 50{,}1\%$$

Από το σύνολο των παιδιών της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης, θα μπορούσε να επιλεγεί παιδί που φοιτά στην Α΄ Δημοτικού;



Κανένα παιδί από τους/τις μαθητές/τριες της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης δεν μπορεί να φοιτά στην Α΄ Δημοτικού, επομένως το ενδεχόμενο να επιλεγεί ένα παιδί που πηγαίνει στην Α΄ Δημοτικού είναι αδύνατο ενδεχόμενο και η πιθανότητα να συμβεί είναι 0.

Και ποια είναι η πιθανότητα, από το σύνολο των μαθητών/τριών της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης, να επιλεγεί ένα παιδί που φοιτά στη Β/βάθμια Γενική Εκπαίδευση;

Όλοι/ες οι μαθητές/τριες της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης φοιτούν στη Β/βάθμια Γενική Εκπαίδευση. Συνεπώς, το ενδεχόμενο να επιλεγεί από αυτούς/ές ένα παιδί που φοιτά στη Β/βάθμια Εκπαίδευση είναι βέβαιο ενδεχόμενο και η πιθανότητα να συμβεί είναι 1.

**Μαθαίνω**

Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A του δειγματικού χώρου Ω συμβολίζεται P(A) και δίνεται από το πηλίκο:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος στοιχείων του ενδεχομένου A}}{\text{Συνολικό πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω}}$$

Η πιθανότητα είναι ένας αριθμός ανάμεσα στο 0 και το 1 ή όταν εκφράζεται με ποσοστά επί τοις εκατό, ανάμεσα στο 0% και το 100%, και εκφράζει πόσο πιθανό είναι να συμβεί ένα ενδεχόμενο.

Όσο πιο κοντά στο 1 ή, αλλιώς στο 100%, είναι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου, τόσο πιο πιθανό είναι να συμβεί το ενδεχόμενο αυτό, ενώ όσο πιο κοντά στο 0 ή στο 0% είναι, τόσο λιγότερο πιθανό είναι να συμβεί το ενδεχόμενο.

Για το βέβαιο ενδεχόμενο (Ω) η πιθανότητα είναι 1 ή 100%, ενώ για το αδύνατο ενδεχόμενο (Ø) η πιθανότητα είναι 0 ή 0%.

## 1.2 Συμπληρωματικά ενδεχόμενα

**1.2.α** Αν επιλέξουμε τυχαία ένα παιδί της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης,

Ποια η πιθανότητα να φοιτά σε Λύκειο;

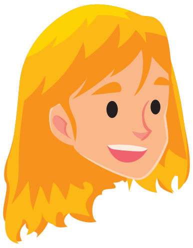
P(να επιλέξουμε μαθητή/τρια Λυκείου) =

$$P(Λ) = \frac{\text{πλήθος των μαθητών/τριών Λυκείου}}{\text{πλήθος όλων των μαθητών/τριών της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης}} = \frac{\quad}{\quad} \approx 0{,}429 = 42{,}9\% \quad \textbf{(i)}$$

Ποια η πιθανότητα να φοιτά σε Γυμνάσιο;

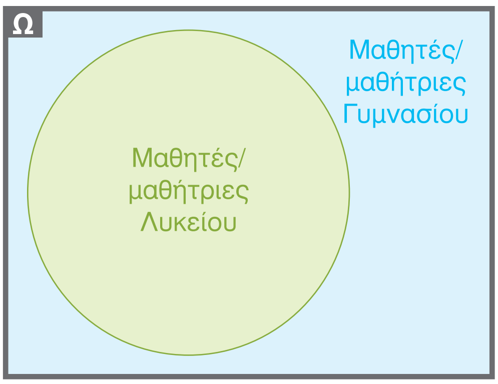
P(να επιλέξουμε μαθητή/τρια Γυμνασίου) =

$$P(Γ) = \frac{\text{πλήθος των μαθητών/τριών Γυμνασίου}}{\text{πλήθος όλων των μαθητών/τριών της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης}} = \frac{\quad}{\quad} \approx \underline{\quad} = \underline{\quad}\,\% \quad \textbf{(ii)}$$



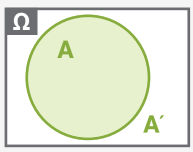
Παρατηρώ ότι, όταν επιλέγουμε τυχαία ένα παιδί της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης, είναι πιο πιθανό να φοιτά στο ________ **(iii)** παρά στο ________ **(iv)**.
Αυτό συμβαίνει επειδή $P(Λ) < P(Γ)$.

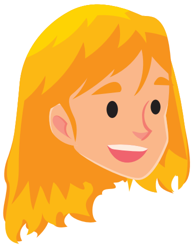
Παρατηρήστε, επίσης, ότι τα ενδεχόμενα Λ και Γ είναι συμπληρωματικά, αφού κάθε μαθητής/τρια της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης θα φοιτά είτε στο Γυμνάσιο είτε στο Λύκειο.




**Μαθαίνω**

Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ ισχύει:
**P(Α΄) + P(Α) = 1** και P(Α΄) = 1 - P(Α)



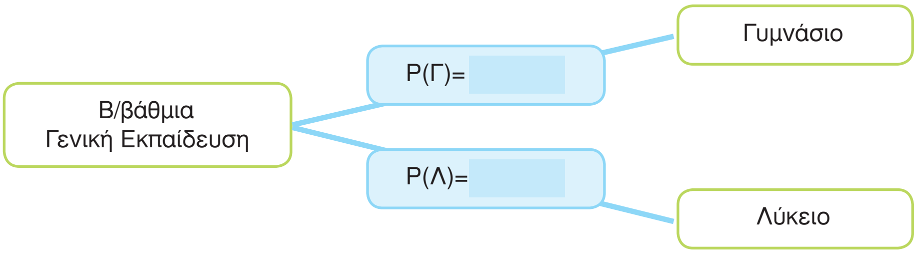


Άρα, αν η πιθανότητα ένας/μία μαθητής/τρια της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης να φοιτά στο Λύκειο είναι 0,429 ή 42,9%, τότε η πιθανότητα να φοιτά στο Γυμνάσιο είναι το υπόλοιπο 0,571 ή 57,1%. Δηλαδή:

P(Γ) = 1 - P(    ) = 1 - ______ = ______ **(v)**

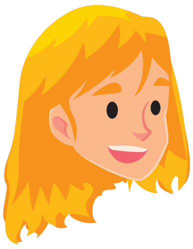
Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω πληροφορίες, συμπληρώστε τις πιθανότητες στο Δενδρόγραμμα 1 που ακολουθεί:

### ΔΕΝΔΡΟΓΡΑΜΜΑ 1



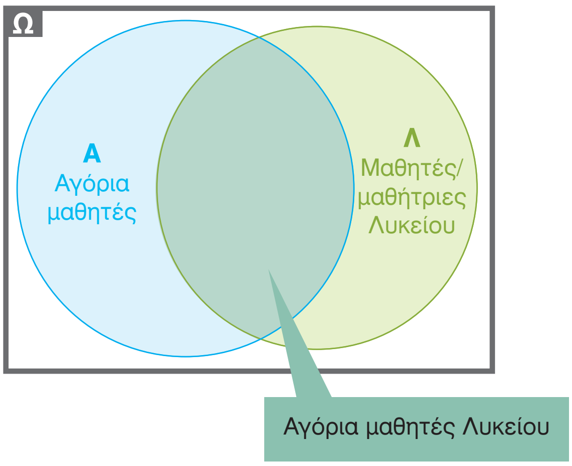

## 1.3 Τομή ενδεχομένων

Πώς μπορούμε να εκφράσουμε το ενδεχόμενο «Αγόρι μαθητής Λυκείου», χρησιμοποιώντας τα ενδεχόμενα Α={Αγόρι}, Κ={Κορίτσι} και τα ενδεχόμενα Λ={Λύκειο}, Γ={Γυμνάσιο};



Το ενδεχόμενο «Αγόρι μαθητής Λυκείου» συμβαίνει, όταν συμβαίνουν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα Α={Αγόρι} και Λ={Λύκειο}.

Σωστά! Όταν συμβαίνουν ταυτόχρονα τα δύο ενδεχόμενα Α και Λ, τότε λέμε ότι συμβαίνει η τομή Α∩Λ των ενδεχομένων αυτών.



**1.3.α** Υπολογίστε τώρα την πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο παιδί της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης να είναι Αγόρι μαθητής Λυκείου.

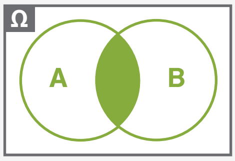
P(Αγόρι μαθητής Λυκείου) =

$$P(\mathbf{A} \cap \mathbf{\Lambda}) = \frac{\text{πλήθος των αγοριών Λυκείου}}{\text{πλήθος όλων των μαθητών/ τριών της Β/ βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης}} = \frac{\quad}{556.590} \approx \quad = \quad \%$$ (i)

Η πιθανότητα να συμβούν ταυτόχρονα δύο ενδεχόμενα Α **και** Β

συμβολίζεται **P(A∩B)**

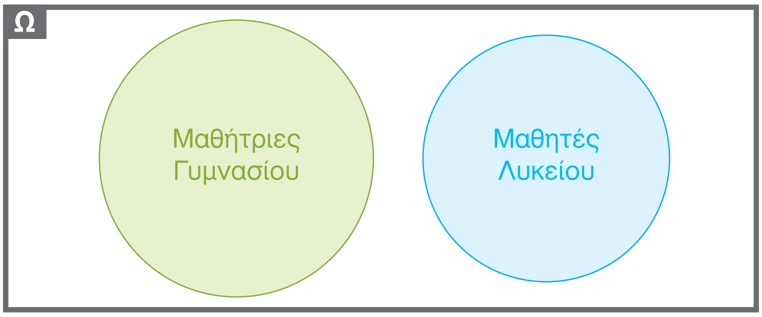
και διαβάζεται **πιθανότητα της τομής** των ενδεχομένων Α και Β.




**Μαθαίνω**

## 1.4 Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

Θα μπορούσατε να σκεφτείτε ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε ένα παιδί το οποίο να είναι μαθήτρια Γυμνασίου και ταυτόχρονα μαθητής Λυκείου;




Σκέφτομαι ότι δεν μπορεί ένα παιδί να είναι ταυτόχρονα μαθήτρια Γυμνασίου και μαθητής Λυκείου. Άρα τα δύο αυτά ενδεχόμενα είναι **ασυμβίβαστα** και η πιθανότητα να συμβούν ταυτόχρονα είναι 0.

**Μαθαίνω**

Δύο ενδεχόμενα Α και Β ονομάζονται **ασυμβίβαστα,** όταν δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα, δηλαδή όταν **A∩B = Ø**.

Για δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα Α και Β ισχύει **P(A∩B) = 0**.

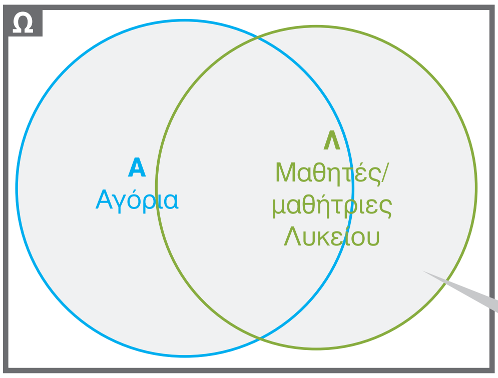
## 1.5 Ένωση ενδεχομένων

Σκεφτείτε τώρα πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο παιδί της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης να είναι «Αγόρι» ή «μαθητής/τρια Λυκείου».

Έχουμε υπολογίσει την πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο παιδί της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης:

- να είναι Αγόρι P(A) = 0,501
- να φοιτά στο Λύκειο P(Λ) = 0,429
- να είναι Αγόρι που φοιτά στο Λύκειο P(**A∩Λ**) = 0,205

Ψάχνουμε την πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα από τα δύο ενδεχόμενα A={Αγόρι} ή Λ={Λύκειο}, δηλαδή αναζητούμε την πιθανότητα της ένωσης P(A∪Λ) των ενδεχομένων αυτών.




**A∪Λ** Αγόρια ή μαθητές/μαθήτριες Λυκείου

Σκέφτομαι


**A∩Λ** Αγόρια μαθητές Λυκείου

Θέλω να βρω την πιθανότητα της ένωσης P(A∪Λ). Παρατηρώ ότι στο A περιλαμβάνονται όλα τα Αγόρια της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης, ενώ στο Λ περιλαμβάνονται τα Κορίτσια και τα Αγόρια που φοιτούν στο Λύκειο. Τα Αγόρια που φοιτούν στο Λύκειο ανήκουν και στο **A** και στο **Λ**. Έτσι, αν προσθέσω τις πιθανότητες P(A) και P(Λ), η πιθανότητα P(Αγόρια μαθητές Λυκείου) θα μετρηθεί δύο φορές.

**Σκέφτομαι**

Για να κάνω σωστό υπολογισμό της πιθανότητας της ένωσης $P(A \cup \Lambda)$, θα προσθέσω τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(\Lambda)$, αλλά θα αφαιρέσω μία φορά την πιθανότητα της τομής $P(A \cap \Lambda)$ των ενδεχομένων **Α** και **Λ**, η οποία έχει μετρηθεί δύο φορές.

Άρα, για την πιθανότητα της ένωσης των ενδεχομένων Α={Αγόρι} και Λ={Λύκειο}, ισχύει:

$$\mathbf{P(A \cup \Lambda) = P(A) + P(\Lambda) - P(A \cap \Lambda)}$$

**1.5.α** Ποια είναι η πιθανότητα $P(A \cup \Lambda)$ ένα τυχαία επιλεγμένο παιδί της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης να είναι Αγόρι ή να φοιτά σε Λύκειο;

P(Αγόρι ή μαθητής/τρια Λυκείου)=

$P(A \cup \Lambda) = P(A) + P(\Lambda) -$ ______ = ______ + ______ - ______ = ______ **(i)**

**Μαθαίνω**

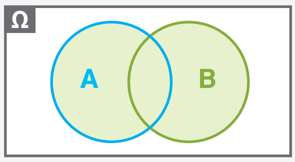
Όταν συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα Α **ή** Β, τότε λέμε ότι συμβαίνει **η ένωση Α∪Β** των ενδεχομένων Α και Β.

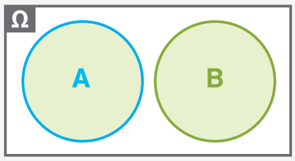
Για την ένωση των ενδεχομένων Α και Β ισχύει:

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι **ασυμβίβαστα**, δηλαδή δεν έχουν κοινά στοιχεία ($A \cap B = \varnothing$), τότε ισχύει:

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$




## 1.6 Δεσμευμένη πιθανότητα - Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα εξαρτώνται μεταξύ τους, όταν η εμφάνιση του ενός επηρεάζει την πιθανότητα εμφάνισης του άλλου. Για παράδειγμα, η πιθανότητα ένα παιδί που φοιτά στη Β/βάθμια Γενική Εκπαίδευση να είναι Αγόρι είναι διαφορετική από την πιθανότητα ενός παιδιού της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης, που **γνωρίζουμε ότι** φοιτά στο Γυμνάσιο, να είναι Αγόρι.

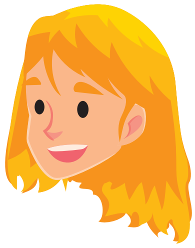
### ΠΙΝΑΚΑΣ 1

| Δευτεροβάθμια Γενική Εκπαίδευση | | | |
|---|---|---|---|
| | ΑΓΟΡΙΑ | ΚΟΡΙΤΣΙΑ | ΣΥΝΟΛΟ |
| ΓΥΜΝΑΣΙΑ | 164.884 | 152.738 | 317.622 |
| ΛΥΚΕΙΑ | 113.886 | 125.082 | 238.968 |
| ΣΥΝΟΛΟ | 278.770 | 277.820 | 556.590 |

Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία του Πίνακα 1, έχουμε βρει την πιθανότητα «ένα παιδί που φοιτά στη Β/βάθμια Γενική Εκπαίδευση να είναι Αγόρι»:

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος αγοριών που φοιτούν στη Β/ βάθμια Γενική Εκπαίδευση}}{\text{πλήθος παιδιών που φοιτούν στη Β/ βάθμια Γενική Εκπαίδευση}} = \frac{278.770}{556.590} \approx 0{,}501 = 50{,}1\%$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την πιθανότητα «ένα παιδί της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης να είναι Αγόρι **δεδομένου** ότι φοιτά στο Γυμνάσιο», η οποία συμβολίζεται **P(A|Γ)** και διαβάζεται **«Δεσμευμένη Πιθανότητα του Α δεδομένου του Γ»**.



Στον Πίνακα 1 βλέπουμε ότι οι μαθητές/τριες Γυμνασίου είναι 317.622, εκ των οποίων οι 164.884 είναι αγόρια, άρα η πιθανότητα να επιλεγεί Αγόρι είναι:

$$P(A|\Gamma) = \frac{\text{πλήθος αγοριών }\textbf{που φοιτούν}\text{ στο Γυμνάσιο}}{\text{πλήθος όλων των μαθητών/τριών που φοιτούν στο Γυμνάσιο}} = \frac{164.884}{317.622} \approx 0{,}519 = 51{,}9\%$$

**1.6.α** Παρατηρώ ότι P(A) [ = ≠ ] P(A|Γ) **(i)**

Επιλέξτε

Ας δούμε έναν διαφορετικό τρόπο για να υπολογίσουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα. Στον Πίνακα1 βλέπουμε ότι, σε σύνολο 556.590 μαθητών/τριών Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης, οι μαθητές/τριες Γυμνασίου είναι 317.622, εκ των οποίων οι 164.884 είναι αγόρια.

P(Αγόρι στη Β/βάθμια Γενική Εκπαίδευση δεδομένου ότι φοιτά στο Γυμνάσιο) =

$$P(A|\Gamma) = \frac{P(\text{αγόρι }\textbf{και}\text{ να φοιτά στο Γυμνάσιο})}{P(\text{μαθητής/ τρια να φοιτά στο Γυμνάσιο})} = \frac{\mathbf{P(A \cap \Gamma)}}{\mathbf{P(\Gamma)}} = \frac{\frac{164.884}{556.590}}{\frac{317.622}{556.590}} = \frac{164.884}{317.622} \approx 0{,}519 = 51{,}9\%$$

**Μαθαίνω**

### Δεσμευμένη πιθανότητα

Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω και P(B) > 0, τότε η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A, δεδομένου ότι έχει ήδη πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο B, λέγεται **δεσμευμένη πιθανότητα** του A με δεδομένο το B και συμβολίζεται με P(A|B).

Για τη **δεσμευμένη πιθανότητα P(A|B)** ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{P(A|B)} = \frac{\mathbf{P(A\cap B)}}{\mathbf{P(B)}} \quad \text{όπου } P(B) > 0$$

Συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι η ακόλουθη σχέση:

$$\mathbf{P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A|B) = P(A)\cdot P(B|A)}$$

**Μαθαίνω**

### Ανεξάρτητα ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται **ανεξάρτητα**, αν και μόνον αν η πραγματοποίηση του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του άλλου, δηλαδή ισχύει

P(A|B) = P(A) και P(B|A) = P(B),  με P(A) > 0 και P(B) > 0.

Για τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα A και B ισχύει **P(A∩B) = P(A) • P(B)**.

**1.6.β** Αν επιλεγεί τυχαία ένα παιδί της Β/βάθμιας, ποια είναι η πιθανότητα να είναι Κορίτσι με δεδομένο ότι φοιτά στο Γυμνάσιο;

Στον Πίνακα 1 βλέπουμε ότι οι μαθητές/τριες Γυμνασίου είναι 317.622, εκ των οποίων οι 152.738 είναι κορίτσια, άρα η πιθανότητα να επιλεγεί Κορίτσι, δεδομένου ότι έχει επιλεγεί παιδί Γυμνασίου, είναι:

$$P(K|\Gamma) = \frac{\text{πλήθος κοριτσιών } \textbf{που φοιτούν} \text{ στο Γυμνάσιο}}{\text{πλήθος μαθητών/τριών που φοιτούν στο Γυμνάσιο}} = \frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}} \approx \boxed{\quad} = \boxed{\quad}\,\% \quad \text{(i)}$$

**Εναλλακτικά**

Στον Πίνακα 1 βλέπουμε ότι σε σύνολο 556.590 μαθητών/τριών Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης, οι μαθητές/τριες Γυμνασίου είναι 317.622, εκ των οποίων οι 152.738 είναι κορίτσια. Δηλαδή:

$$P(K|\Gamma) = \frac{P(\text{κορίτσι } \textbf{και} \text{ να φοιτά στο Γυμνάσιο})}{P(\text{μαθητής/τρια να φοιτά στο Γυμνάσιο})} = \frac{\frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}}}{\frac{317.622}{556.590}} = \frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}} \approx 0{,}481 = 48{,}1\% \quad \text{(ii)}$$

**1.6.γ** Αν επιλεγεί τυχαία ένα παιδί της Β/βάθμιας, ποια είναι η πιθανότητα να είναι Αγόρι με δεδομένο ότι φοιτά στο Λύκειο;

$$P(A|\Lambda) = \frac{\text{πλήθος αγοριών που φοιτούν στο Λύκειο}}{\text{πλήθος μαθητών/τριών που φοιτούν στο Λύκειο}} = \frac{\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}} \approx \boxed{\quad} = \boxed{\quad}\,\% \quad \text{(i)}$$

Σημείωση: Οι υπολογισμοί των πιθανοτήτων πραγματοποιήθηκαν με στρογγυλοποίηση στο 3ο δεκαδικό ψηφίο.

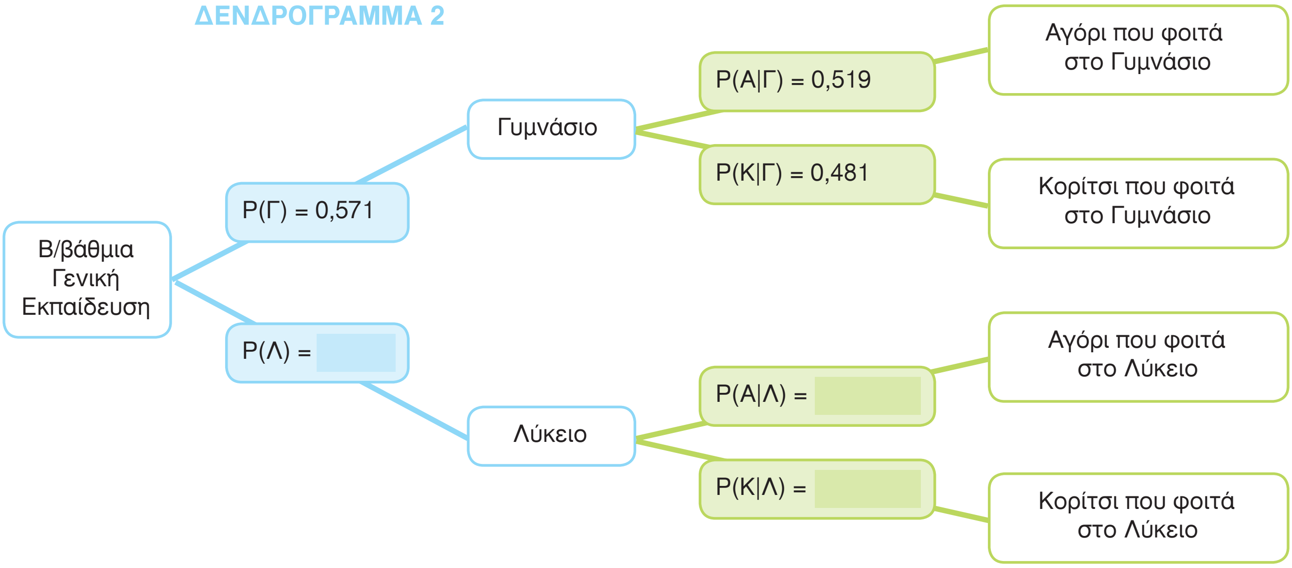
**1.6.δ** Αν επιλεγεί τυχαία μαθητής/τρια της Β/βάθμιας, ποια είναι η πιθανότητα να είναι Κορίτσι με δεδομένο ότι φοιτά στο Λύκειο;

Στον Πίνακα 1 βλέπουμε ότι, σε σύνολο 556.590 μαθητών/τριών Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης, οι μαθητές/τριες Λυκείου είναι 238.968, εκ των οποίων οι 125.082 είναι κορίτσια.

$$P(Κ|Λ) = \frac{P(\quad)}{P(Λ)} = \frac{\_\_\_\_}{\_\_\_\_} = \frac{\quad}{\quad} \approx \_\_\_\_ = \_\_\_\_\ \% \qquad \text{(i)}$$

Συμπληρώστε τις πληροφορίες που βρήκατε, στο Δενδρόγραμμα 2.

## ΔΕΝΔΡΟΓΡΑΜΜΑ 2




Ας εξερευνήσουμε λίγο παραπάνω τις πληροφορίες που υπάρχουν στο Δενδρόγραμμα 2. Ποια είναι η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο παιδί από το σύνολο των μαθητών/τριών της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης να φοιτά στο Γυμνάσιο και να είναι Αγόρι **P(Α∩Γ)**;

**Θυμάμαι**

Η πιθανότητα να συμβαίνουν ταυτόχρονα και τα δύο ενδεχόμενα, Α **και** Γ, δηλαδή η πιθανότητα της τομής (Α∩Γ) των Α και Γ, συμβολίζεται P(Α∩Γ)

**και ισχύει η σχέση: P(Α∩Γ) = P(Γ) • P(Α|Γ).**

Είναι ίδιο να γράψουμε **(Α∩Γ)** ή **(Γ∩Α),** αλλά το **(Α|Γ)** είναι διαφορετικό από το **(Γ|Α)**.

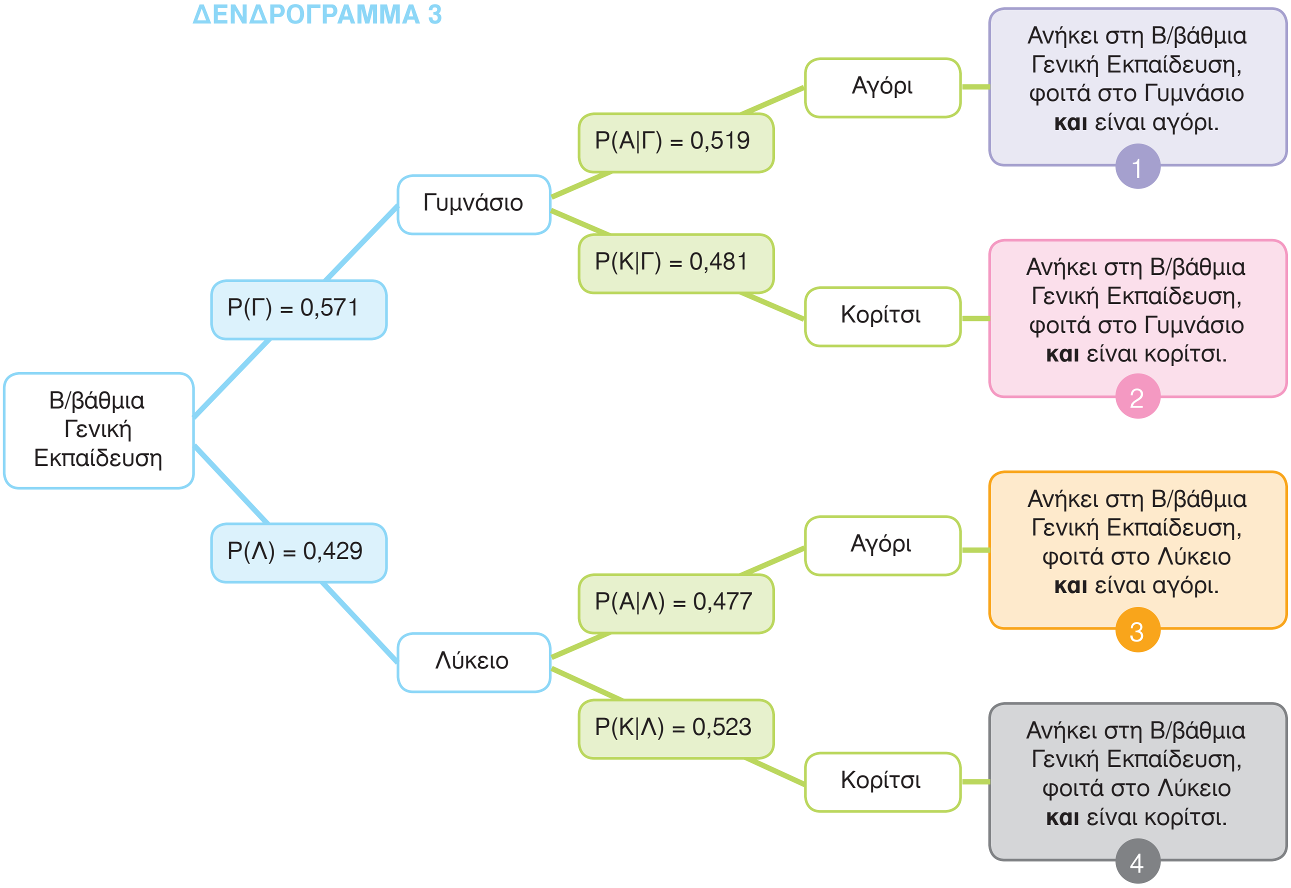
Για το παιδί της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης που θα επιλέξουμε, θέλουμε να τηρούνται ταυτόχρονα 2 προϋποθέσεις:

Δεδομένου ότι ανήκει στη Β/βάθμια Γενική Εκπαίδευση,

- να είναι Αγόρι **και**
- να φοιτά στο Γυμνάσιο.

Ακολουθεί το Δενδρόγραμμα 3, συμπληρωμένο με όλες τις πληροφορίες που υπολογίσαμε έως τώρα:

### ΔΕΝΔΡΟΓΡΑΜΜΑ 3




Παρατηρούμε ότι:

- η πιθανότητα να φοιτά κάποιο παιδί της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης στο Γυμνάσιο είναι P(Γ) = 0,571

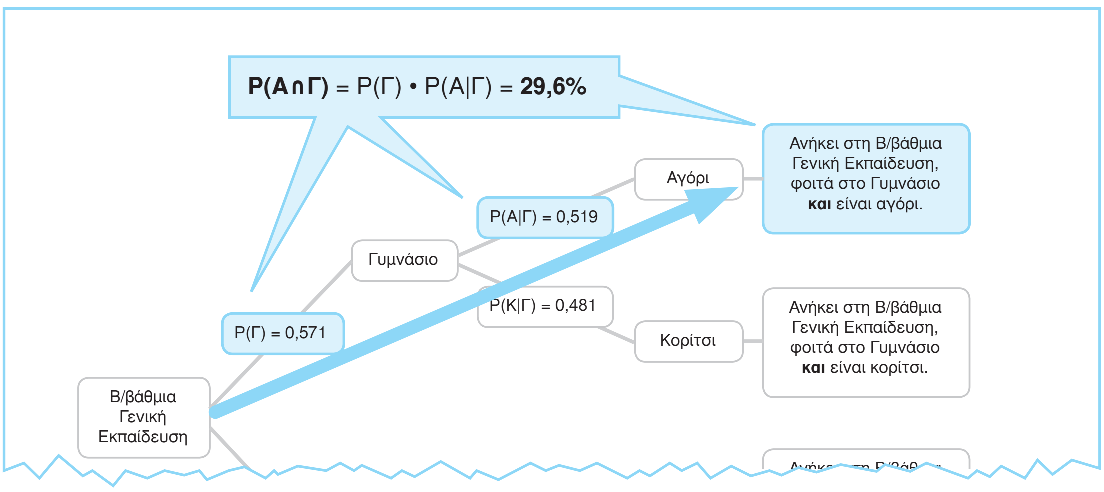
και

- η πιθανότητα να είναι Αγόρι, δεδομένου ότι φοιτά στο Γυμνάσιο, είναι P(Α|Γ) = 0,519.

Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις πιθανότητες έχουμε:

**P(Α∩Γ)** = P(Γ) • P(Α|Γ) = 0,571 • 0,519 ≈ 0,296

Οπότε, P(Α∩Γ) = 29,6% είναι η πιθανότητα, από το σύνολο των μαθητών/τριών της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης, να επιλεγεί Αγόρι μαθητής Γυμνασίου.



1.6.ε Ας διερευνήσουμε και τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

**1. Ποια είναι η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο παιδί, από το σύνολο των μαθητών/τριών της Β/θάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης, να φοιτά στο Γυμνάσιο και να είναι Αγόρι P(Α∩Γ);**

**P(Α∩Γ)**: η πιθανότητα να συμβαίνουν ταυτόχρονα και τα δύο ενδεχόμενα Α **και** Γ, δηλαδή ένα παιδί της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης:

- να είναι Αγόρι **και**
- να φοιτά στο Γυμνάσιο

Παρατηρώντας το Δενδρόγραμμα 3
P(Γ) = 0,571 και P(Α|Γ) = 0,519

άρα
**P(Α∩Γ)** = **P(Γ) • P(Α|Γ)** = 0,571 • 0,519 ≈ 0,296

**Οπότε, P(Α∩Γ)** = 29,6% είναι η πιθανότητα, από το σύνολο των μαθητών/τριών της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης, να επιλεγεί Αγόρι μαθητής Γυμνασίου.

1

**2. Ποια είναι η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο παιδί, από το σύνολο των μαθητών/τριών της Β/θάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης, να φοιτά στο Γυμνάσιο και να είναι Κορίτσι P(Κ∩Γ);**

**P(Κ∩Γ)**: η πιθανότητα να συμβαίνουν ταυτόχρονα και τα δύο ενδεχόμενα Κ **και** Γ, δηλαδή ένα παιδί της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης:

- να είναι Κορίτσι **και**
- να φοιτά στο Γυμνάσιο

Παρατηρώντας το Δενδρόγραμμα 3
P(Γ) = 0,571 και P(Κ|Γ) = 0,481

άρα
**P(Κ∩Γ)** = P(Γ) • P(Κ|Γ) = 0,571 • 0,481 ≈ 0,275

**Οπότε, P(Κ∩Γ)** = 27,5% είναι η πιθανότητα, από το σύνολο των μαθητών/τριών της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης, να επιλεγεί Κορίτσι μαθήτρια Γυμνασίου.

2

**3. Ποια είναι η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο παιδί, από το σύνολο των μαθητών/τριών της Β/θάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης, να φοιτά στο Λύκειο και να είναι Αγόρι P(Α∩Λ);**

**P(Α∩Λ)**: η πιθανότητα να συμβαίνουν ταυτόχρονα και τα δύο ενδεχόμενα Α **και** Λ, δηλαδή ένα παιδί της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης:

- να είναι Αγόρι **και**
- να φοιτά στο Λύκειο

Παρατηρώντας το Δενδρόγραμμα 3
P(Λ) = ______ (i) και P(Α|Λ) = ______ (ii)

άρα
**P( ∩ ) = P( ) • P( | )** = ______ • ______ ≈ ______ (iii)

**Οπότε, P ( ∩ )** = ______ % είναι η πιθανότητα, από το σύνολο των μαθητών/τριών της Β/βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης, να επιλεγεί ______ μαθητής ______. (iv)

3

**4. Ποια είναι η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο παιδί, από το σύνολο των μαθητών/τριών της Β/θάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης, να φοιτά στο Λύκειο και να είναι Κορίτσι P(Κ∩Λ);**

**P(Κ∩Λ)**: η πιθανότητα να συμβαίνουν ταυτόχρονα και τα δύο ενδεχόμενα Κ **και** Λ, δηλαδή ένα παιδί της Β/βάθμιας εκπαίδευσης:

- να είναι Κορίτσι **και**
- να φοιτά στο Λύκειο

Παρατηρώντας το Δενδρόγραμμα 3
P(Λ) = ______ (i) και P( |Λ) = ______ (ii)

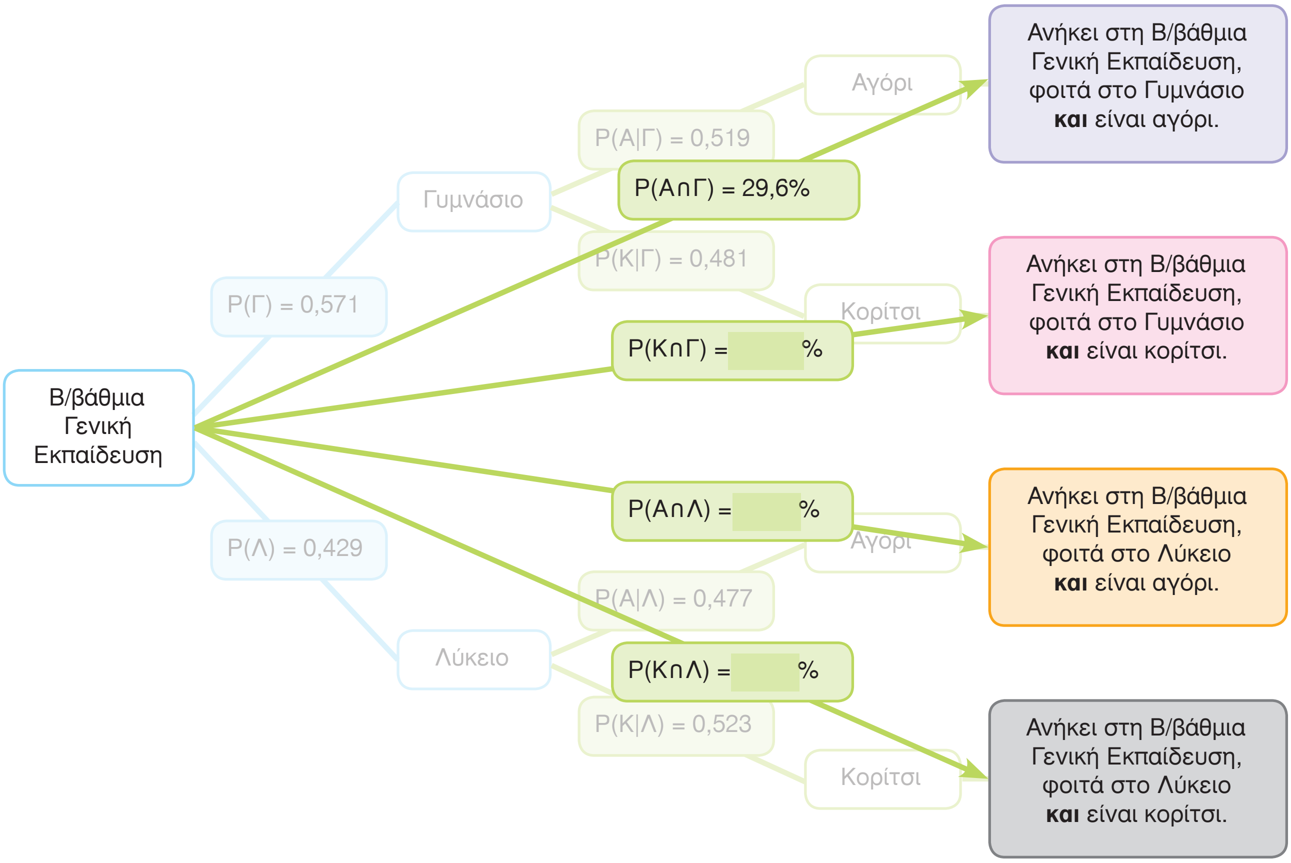
άρα
**P( ∩ ) = P( ) • P( | )** = ______ • ______ ≈ ______ (iii)

**Οπότε, P( ∩ )** = ______ % είναι η πιθανότητα, από το σύνολο των παιδιών της Β/βάθμιας εκπαίδευσης, να επιλεγεί ______ μαθήτρια ______. (iv)

4

Τώρα αποτυπώστε τα αποτελέσματα στο Δενδρόγραμμα 4.

## ΔΕΝΔΡΟΓΡΑΜΜΑ 4




**1.6.στ** Υπολογίστε τα παρακάτω αθροίσματα:

P(Α∩Γ) + P(Κ∩Γ) + P(Α∩Λ) + P(Κ∩Λ) = % + % + % + % = % = P(Ω) **(i)**

P(Α∩Γ) + P(Κ∩Γ) = % + % = % = P(Γ) **(ii)**

P(Α∩Λ) + P(Κ∩Λ) = % + % = % = P( ) **(iii)**

P(Α∩Γ) + P(Α∩Λ) = % + % = % = P(Α) **(iv)**

P(Κ∩Γ) + P(Κ∩Λ) = % + % = % = P( ) **(v)**

Συμπληρώστε τον Πίνακα που ακολουθεί **(vi)**:

| | | | ΑΘΡΟΙΣΜΑ |
|---|---|---|---|
| | **P(Α∩Γ)** = 29,6% | **P(Α∩Λ)** = | P(Α) = 50,1% |
| | **P(Κ∩Γ)** = | **P(Κ∩Λ)** = | P( ) = |
| ΑΘΡΟΙΣΜΑ | P(Γ) = | P( ) = | P(Ω) = 100,0% |

## 1.7 Δραστηριότητα

Επισκεφθείτε την ιστοσελίδα της ΕΛΣΤΑΤ www.statistics.gr και αναζητήστε τα πιο πρόσφατα αποτελέσματα των Ερευνών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, στην ενότητα «Στατιστικές» / Πληθυσμός και Κοινωνικές Συνθήκες / Εκπαίδευση / Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση / Γυμνάσια (έναρξη-λήξη) και Γενικά Λύκεια (έναρξη-λήξη).

Με τη χρήση των στοιχείων που βρίσκονται στους πίνακες

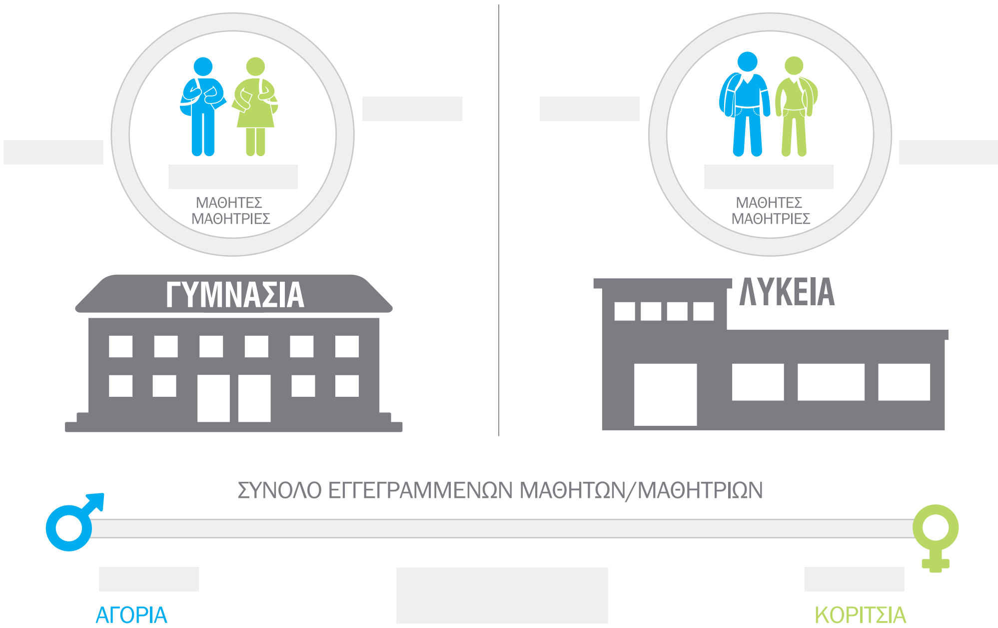
- 08L. Μαθητές Γυμνασίων όλων των Τύπων που Παρέμειναν Εγγεγραμμένοι κατά τη Λήξη του Σχολικού Έτους κατά Φύλο, Έτος Γέννησης, Τάξη, Περιφέρεια και Νομό – Λήξη

και

- 08L. Μαθητές Ενιαίων Λυκείων όλων των Τύπων που Παρέμειναν Εγγεγραμμένοι κατά τη Λήξη του Σχολικού Έτους κατά Φύλο, Έτος Γέννησης, Τάξη, Περιφέρεια και Νομό – Λήξη,

συμπληρώστε τον παρακάτω Πίνακα και το αντίστοιχο infographic (δείτε τη σελίδα 10):

| Δευτεροβάθμια Γενική Εκπαίδευση (20_ _/20_ _) | | | |
|---|---|---|---|
| | ΑΓΟΡΙΑ | ΚΟΡΙΤΣΙΑ | ΣΥΝΟΛΟ |
| ΓΥΜΝΑΣΙΑ | | | |
| ΛΥΚΕΙΑ | | | |
| ΣΥΝΟΛΟ | | | |




Πηγή: ΕΛΣΤΑΤ - Έρευνες Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης: Γυμνάσια - Γενικά Λύκεια, 20_ _ / 20_ _.

# 2 ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΓΡΑΦΙΣΤΙΚΗΣ

Το 2018 προκηρύχθηκε από την ΕΛΣΤΑΤ Διαγωνισμός Γραφιστικής για τη δημιουργία του λογότυπου της «Απογραφής Πληθυσμού - Κατοικιών 2021». Δικαίωμα συμμετοχής είχαν: α) φοιτητές/τριες Ανώτατων Εκπαιδευτικών Ιδρυμάτων (ΑΕΙ), β) σπουδαστές/στριες Δημόσιων Ινστιτούτων Επαγγελματικής Κατάρτισης (ΔΙΕΚ) και γ) σπουδαστές/στριες Ιδιωτικών Ινστιτούτων Επαγγελματικής Κατάρτισης (ΙΙΕΚ).

Στον διαγωνισμό υποβλήθηκαν **24** έγκυρες συμμετοχές από **11** άνδρες και **13** γυναίκες:

**ΣΥΜΜΕΤΟΧΕΣ ΣΤΟΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟ ΓΡΑΦΙΣΤΙΚΗΣ**


## 2.1 Αρχή του γινομένου

Πόσα διαφορετικά προφίλ συμμετεχόντων στον Διαγωνισμό Γραφιστικής υπάρχουν;

Παρατηρώ ότι τα προφίλ των συμμετεχόντων στον Διαγωνισμό Γραφιστικής διαμορφώνουν δύο χαρακτηριστικά:
- **το Φύλο**: άνδρας, γυναίκα, και
- **η Ιδιότητα**: φοιτητής/τρια ΑΕΙ, σπουδαστής/στρια ΔΙΕΚ, σπουδαστής/στρια ΙΙΕΚ.

**ΔΕΝΔΡΟΓΡΑΜΜΑ 1**

Στο **Δενδρόγραμμα 1** απεικονίζονται τα διαφορετικά προφίλ των συμμετεχόντων.

| | Φύλο<br>**2 τρόποι** | Ιδιότητα<br>**3 τρόποι** | Προφίλ<br>**6 τρόποι** |
|---|---|---|---|
| Αρχή | Άνδρας | ΑΕΙ | Άνδρας, ΑΕΙ |
| | | ΔΙΕΚ | Άνδρας, ΔΙΕΚ |
| | | ΙΙΕΚ | Άνδρας, ΙΙΕΚ |
| | Γυναίκα | ΑΕΙ | Γυναίκα, ΑΕΙ |
| | | ΔΙΕΚ | Γυναίκα, ΔΙΕΚ |
| | | ΙΙΕΚ | Γυναίκα, ΙΙΕΚ |

Όπως φαίνεται στο Δενδρόγραμμα 1, υπάρχουν 2 τρόποι επιλογής για το «Φύλο» και 3 τρόποι επιλογής για την «Ιδιότητα», με αποτέλεσμα να προκύπτουν 6 διαφορετικά προφίλ συμμετεχόντων.

**Μαθαίνω**

Σύμφωνα με την **«αρχή του γινομένου»** ή, αλλιώς, **«βασική αρχή της απαρίθμησης»**, αν υπάρχουν

$\nu_1$ τρόποι για να κάνω την ενέργεια $\varepsilon_1$
$\nu_2$ τρόποι για να κάνω την ενέργεια $\varepsilon_2$
. .
. .
$\nu_\kappa$ τρόποι για να κάνω την ενέργεια $\varepsilon_\kappa$

τότε υπάρχουν $\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \ldots \cdot \nu_\kappa$ τρόποι για να κάνω τις ενέργειες $\varepsilon_1$ $\varepsilon_2$ ... $\varepsilon_\kappa$ ταυτόχρονα.

**2.1.α** Εφαρμόζουμε την **αρχή του γινομένου** για να βρούμε το πλήθος των διαφορετικών προφίλ συμμετεχόντων.

____ · ____ = ____ (i)

Τρόποι (επιλογές) του χαρακτηριστικού **«Φύλο»**

Τρόποι (επιλογές) του χαρακτηριστικού **«Ιδιότητα»**

Τρόποι (επιλογές) του προφίλ συμμετεχόντων

## 2.2 Διατάξεις χωρίς επαναλήψεις

Στον Διαγωνισμό Γραφιστικής υποβλήθηκαν 24 έγκυρες συμμετοχές. Βραβεύτηκε μία τριάδα νικητών/τριων που κατέλαβαν την πρώτη, τη δεύτερη και την τρίτη θέση.

**2.2.α** Άραγε πόσες διαφορετικές τριάδες βραβευμένων συμμετοχών μπορούν να δημιουργηθούν από τις 24 συμμετοχές;

Να παρατηρήσουμε ότι εδώ μας ενδιαφέρει η **θέση** (1η, 2η και 3η) κάθε νικητή/τριας. Για παράδειγμα, η (διατεταγμένη) τριάδα Α Β Γ είναι διαφορετική από τη (διατεταγμένη) τριάδα Β Α Γ.

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1**

| | 1η θέση | 2η θέση | 3η θέση |
|---|---|---|---|
| Επιλογές/τρόποι | | | |

Ο κάτοχος της πρώτης θέσης μπορεί να είναι ένας από τους 24 συμμετέχοντες.

Στη δεύτερη θέση, όπου δεν μπορεί να είναι ο κάτοχος της πρώτης θέσης, υπάρχουν 24-1=23 επιλογές.

Αντίστοιχα, για την τρίτη θέση, όπου δεν μπορεί να είναι οι κάτοχοι της πρώτης και δεύτερης θέσης, υπάρχουν 24-2=22 επιλογές.

Εφαρμόζω την **αρχή του γινομένου** για να βρω πόσες διαφορετικές τριάδες βραβευμένων συμμετοχών μπορούν να δημιουργηθούν.

$$\square \cdot \square \cdot \square = \square \qquad \text{(i)}$$

Καθεμία από τις παραπάνω διατεταγμένες τριάδες λέγεται **διάταξη χωρίς επαναλήψεις των 24 ανά 3**.

**Μαθαίνω**

**Διάταξη χωρίς επαναλήψεις ν** διαφορετικών αντικειμένων ανά **κ** ονομάζεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορώ να επιλέξω **κ** από τα **ν** αντικείμενα και να τα τοποθετήσω στη σειρά.

Το πλήθος των διατάξεων χωρίς επαναλήψεις των **ν** ανά **κ** συμβολίζεται με $\Delta_\kappa^\nu$ και δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta_\kappa^\nu = \nu(\nu-1)\ldots(\nu-\kappa+1) = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$$

όπου **κ** μικρότερο ή ίσο με **ν**.

**Θυμάμαι**

Το σύμβολο **!** διαβάζεται «παραγοντικό».

**ν!** είναι ο σύντομος τρόπος για να γράψουμε το γινόμενο των **ν** πρώτων θετικών ακέραιων αριθμών, δηλαδή:

$$\nu! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot(\nu-1)\cdot \nu$$

Παρατηρώ ότι: $\nu! = (\nu-1)!\cdot\nu$

Εξ ορισμού ισχύει: $0! = 1$

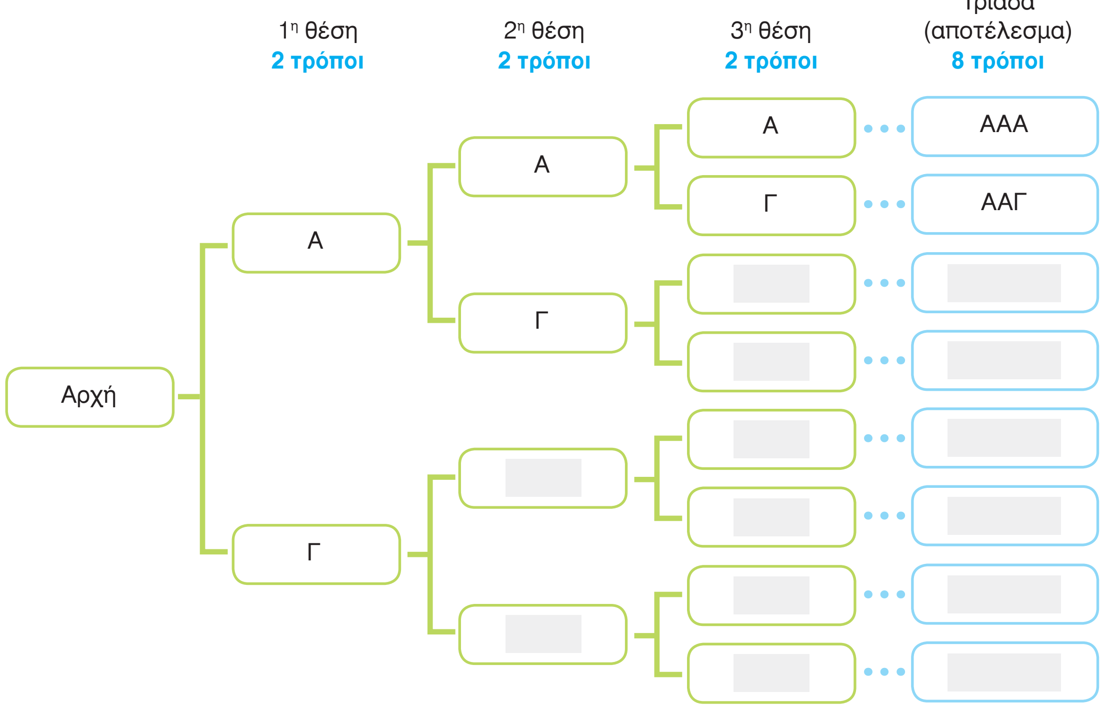
## 2.3 Διατάξεις με επαναλήψεις

Άραγε πόσες διαφορετικές τριάδες νικητών/τριών υπάρχουν με βάση το φύλο τους;

**!** Να παρατηρήσουμε ότι και εδώ μας ενδιαφέρει η **θέση** κάθε νικητή/τριας, δηλαδή, αν ο Άνδρας σημειώνεται με Α και η Γυναίκα με Γ, η τριάδα Α Α Γ είναι διαφορετική από την τριάδα Α Γ Α.

**2.3.α** Ας αποτυπώσουμε στο Δενδρόγραμμα 2 τις διαφορετικές τριάδες των νικητών/τριών ως προς το φύλο.

**ΔΕΝΔΡΟΓΡΑΜΜΑ 2**




**2.3.β** Συμπληρώστε στον Πίνακα 2 το πλήθος των επιλογών για το φύλο του/της νικητή/τριας για κάθε θέση κατάταξης. Στη συνέχεια, υπολογίστε το πλήθος των διαφορετικών τριάδων νικητών/τριών που μπορούν να σχηματιστούν με βάση το φύλο των νικητών/τριών.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 2**

| | $1^{η}$ θέση | $2^{η}$ θέση | $3^{η}$ θέση |
|---|---|---|---|
| Επιλογές/τρόποι | | | |

Σύμφωνα με την αρχή του ______________ (i), το πλήθος των διαφορετικών τριάδων, που μπορούν να σχηματιστούν με βάση το φύλο των νικητών/τριών, είναι:

$$\boxed{\quad} \cdot \boxed{\quad} \cdot \boxed{\quad} = 2^3 = \boxed{\quad} \qquad \text{(ii)}$$

Καθεμία από τις παραπάνω τριάδες λέγεται **διάταξη με επαναλήψεις των 2 ανά 3**.

**Μαθαίνω**

**Διάταξη με επαναλήψεις ν** διαφορετικών αντικειμένων ανά **κ**

ονομάζεται κάθε τοποθέτηση σε σειρά **κ** από τα **ν** αντικείμενα, όταν κάθε αντικείμενο μπορεί να επαναλαμβάνεται μέχρι **κ** φορές.

Το πλήθος των διατάξεων με επαναλήψεις των **ν** ανά **κ** συμβολίζεται με $E_\kappa^\nu$ και δίνεται από τη σχέση: $E_\kappa^\nu = \underbrace{\nu \cdot \nu \cdot \ldots \cdot \nu}_{\kappa \text{ παράγοντες}} = \nu^\kappa$

Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το **κ** ως προς το **ν**.

## 2.4 Εφαρμογή

Κάθε υποψήφιος, προκειμένου να συμμετάσχει στον Διαγωνισμό Γραφιστικής, συμπλήρωσε μία ηλεκτρονική φόρμα με τα στοιχεία του. Με την υποβολή της φόρμας το ηλεκτρονικό σύστημα απέδιδε αυτόματα έναν 3ψήφιο κωδικό για τη συμμετοχή.

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΓΡΑΦΙΣΤΙΚΗΣ
2018

Λογότυπο «Απογραφής Πληθυσμού - Κατοικιών 2021»

**2.4.α** **Πόσοι διαφορετικοί 3ψήφιοι κωδικοί συμμετοχής** στον διαγωνισμό μπορούν να δημιουργηθούν, αν χρησιμοποιήσεις τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9:

Όταν **δεν επιτρέπεται η επανάληψη** του ίδιου ψηφίου;

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

**ΠΙΝΑΚΑΣ 3**

| | 1º ψηφίο | 2º ψηφίο | 3º ψηφίο |
|---|---|---|---|
| Επιλογές/τρόποι | | | |

Δηλαδή κάθε 3ψήφιος κωδικός είναι μία διάταξη ______ **(i)** επαναλήψεις 9 στοιχείων ανά ______ **(ii)**.

Το πλήθος των διαφορετικών 3ψήφιων κωδικών χωρίς επανάληψη του ίδιου ψηφίου, που μπορούν να σχηματιστούν με τα 9 ψηφία, είναι:

$\Delta_3^9 = \boxed{\phantom{00}} \cdot \boxed{\phantom{00}} \cdot \boxed{\phantom{00}} = \boxed{\phantom{0000}}$ **(iii)**

Όταν **επιτρέπεται η επανάληψη** του ίδιου ψηφίου;

Συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα:

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4**

| | 1º ψηφίο | 2º ψηφίο | 3º ψηφίο |
|---|---|---|---|
| Επιλογές/τρόποι | | | |

Δηλαδή κάθε 3ψήφιος κωδικός είναι μία διάταξη ______ **(iv)** επαναλήψεις ______ **(v)** στοιχείων ανά 3.

Το πλήθος των διαφορετικών 3ψήφιων κωδικών με επανάληψη του ίδιου ψηφίου, που μπορούν να σχηματιστούν με τα 9 ψηφία, όταν επιτρέπεται η επανάληψη του ίδιου ψηφίου, είναι:

$E_3^9 = \boxed{\phantom{00}} \cdot \boxed{\phantom{00}} \cdot \boxed{\phantom{00}} = \boxed{\phantom{00}} = \boxed{\phantom{0000}}$ **(vi)**

## Βραβεία του Διαγωνισμού Γραφιστικής της ΕΛΣΤΑΤ για το λογότυπο της Απογραφής Πληθυσμού - Κατοικιών 2021

1η θέση

ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΚΑΤΣΑΡΟΣ
Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής

2η θέση

ΝΕΚΤΑΡΙΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΠΟΥΛΟΣ
Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής

3η θέση

ΕΥΑΓΓΕΛΙΑ ΧΑΣΑΠΗ
ΔΙΕΚ Καλαμάτας

# 2021

# Όλοι μετράμε

Απογραφή Πληθυσμού - Κατοικιών

Απογραφή Κτιρίων 2021
Ελληνική Στατιστική Αρχή

2021
Απογραφή
Πληθυσμού - Κατοικιών
Ελληνική Στατιστική Αρχή

**ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2021**

## ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΓΡΑΦΗ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ - ΚΑΤΟΙΚΙΩΝ 2021

Η Ελληνική Στατιστική Αρχή (ΕΛΣΤΑΤ), όπως κάθε δέκα χρόνια, διενήργησε, το 2021, την Απογραφή Πληθυσμού - Κατοικιών, την πρώτη ψηφιακή Απογραφή στη Χώρα μας, με σκοπό τη συγκέντρωση στοιχείων για τα δημογραφικά, οικονομικά και κοινωνικά χαρακτηριστικά του πληθυσμού της Ελλάδας, καθώς και για τη σύνθεση των νοικοκυριών και τις συνθήκες στέγασής τους. Η Απογραφή Πληθυσμού - Κατοικιών αποτελεί διαχρονικά την πλέον σύνθετη και ευρείας κλίμακας στατιστική εργασία ενός Κράτους, ενώ τα αποτελέσματά της αντικατοπτρίζουν τις δημογραφικές και κοινωνικοοικονομικές συνθήκες της εποχής που διενεργείται.

Μέσω της Απογραφής Πληθυσμού - Κατοικιών γίνεται η καταμέτρηση του μόνιμου πληθυσμού της Ελλάδας και, ταυτόχρονα, η καταμέτρηση του νόμιμου πληθυσμού της Χώρας (δηλαδή των δημοτών κάθε Δήμου και Δημοτικής Ενότητας), από την οποία προκύπτουν σημαντικά αποτελέσματα που συνιστούν τη βάση για την πλήρη αντιπροσωπευτικότητα του δημοκρατικού μας πολιτεύματος, όπως η κατανομή των βουλευτικών εδρών στις επιμέρους εκλογικές περιφέρειες κατά τις βουλευτικές εκλογές (άρθρο 54 του Συντάγματος). Τα αποτελέσματα της Απογραφής αποτελούν οδηγό για την αποτελεσματική άσκηση οικονομικής και κοινωνικής πολιτικής και καλύπτουν μια σειρά από διεθνείς υποχρεώσεις της Χώρας.

Στο πλαίσιο διασφάλισης της δημόσιας υγείας, και φυσικά της υγείας των υπαλλήλων και των συνεργατών της, λόγω της πανδημίας της νόσου του κορωνοϊού (Covid-19), η ΕΛΣΤΑΤ σχεδίασε και πραγματοποίησε την Απογραφή Πληθυσμού - Κατοικιών 2021 με υβριδικό σύστημα, που προέβλεπε την ηλεκτρονική αυτοαπογραφή των νοικοκυριών μέσω ειδικής διαδικτυακής εφαρμογής και, για όσα νοικοκυριά δεν ήταν δυνατή η ηλεκτρονική αυτοαπογραφή, είτε τη συμπλήρωση έντυπων ερωτηματολογίων από τους Απογραφείς, διά ζώσης ή τηλεφωνικά, είτε τη διανομή έντυπου ερωτηματολογίου και τη συμπλήρωσή του από το νοικοκυριό, χωρίς την παρουσία Απογραφέα.

Η Απογραφή διενεργήθηκε βάσει του Κανονισμού (ΕΕ) 763/2008 του Ευρωπαϊκού Κοινοβουλίου και του Συμβουλίου σχετικά με τις Απογραφές Πληθυσμού και Στέγασης και του Νόμου 4772/2021 (ΦΕΚ 17/ Α΄/ 5-2-2021). Πρόκειται για την πρώτη Απογραφή που διενεργείται βάσει Νόμου, ο οποίος μάλιστα ψηφίστηκε με ευρύτατη πλειοψηφία από τη Βουλή.

# Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΩΝ ΑΠΟΓΡΑΦΩΝ 1821-2021

**1821** Η Ελληνική Επανάσταση

**1828** Η πρώτη Απογραφή στην Ελλάδα, με Κυβερνήτη τον Ιωάννη Καποδίστρια, με αναδρομική εκτίμηση του πληθυσμού για το 1821

**1836** Η πρώτη Απογραφή από το Γραφείο Δημοσίου Οικονομίας της «Επί των Εσωτερικών Γραμματείας της Επικρατείας». Μέχρι το 1845 γινόταν Απογραφή κάθε έτος ενώ, στη συνέχεια, οι Απογραφές διενεργούνταν σε ακανόνιστα χρονικά διαστήματα (1848, 1853, 1856 κ.λπ.)

**1861** Η πρώτη Απογραφή Πληθυσμού σύμφωνα με τη στατιστική επιστήμη της εποχής και όχι για την εκτέλεση (στρατολογικών, φορολογικών κ.λπ.) νόμων του Κράτους

**1870** Ανακοινώθηκαν στοιχεία, για πρώτη φορά, αναφορικά με τον εγγράμματο και αγράμματο πληθυσμό. Ως εγγράμματοι, θεωρούνταν όσοι γνώριζαν απλώς να υπογράφουν, έστω και μηχανικά

**1879** Επεξεργασία των αποτελεσμάτων, για πρώτη φορά, με συγκεντρωτικό τρόπο από έναν φορέα (Υπουργείο Εσωτερικών). Εγγράμματοι θεωρούνταν, πλέον, όσοι γνώριζαν γραφή και ανάγνωση

**1881** Απογραφή των κατοίκων της Θεσσαλίας και της Άρτας

**1889** Διεξαγωγή Απογραφής για πρώτη φορά εντός μίας ημέρας πανελλαδικώς, με οικογενειακά δελτία

**1896** Καθολική χρήση για πρώτη φορά ειδικών ατομικών απογραφικών δελτίων. Η επεξεργασία των δελτίων δεν ολοκληρώθηκε λόγω πυρκαγιάς

**1907** Η πρώτη Απογραφή στηριζόμενη σε κανόνες της σύγχρονης στατιστικής επιστήμης με ιδιαίτερη βαρύτητα στην κατάρτιση του απογραφικού δελτίου

**1913** Απογραφή των κατοίκων των νέων επαρχιών της Ελλάδας

**1920** Μηχανογραφική επεξεργασία αποτελεσμάτων για πρώτη φορά

Πηγή: ΕΛΣΤΑΤ, Λεύκωμα «Απογραφές Πληθυσμού - Κατοικιών 1821 - 2021»

**https://www.statistics.gr/el/2021-pop-priv-results**

**1923** Απογραφή προσφύγων από την Μικρά Ασία και την Ανατολική Θράκη

**1928** Η Απογραφή διενεργήθηκε από τη Γενική Στατιστική Υπηρεσία της Ελλάδος, που ιδρύθηκε το 1925

**1940** Η Απογραφή διενεργήθηκε στις 16 Οκτωβρίου, δώδεκα μόλις ημέρες πριν την έναρξη του ελληνοϊταλικού πολέμου

**1947** Απογραφή των κατοίκων των Δωδεκανήσων

**1951** Η πρώτη Απογραφή στην οποία το ελληνικό κράτος παρουσιάζεται εδαφικά το ίδιο με το σημερινό

**1961** Διενέργεια για πρώτη φορά δοκιμαστικής Απογραφής και δειγματοληπτικής έρευνας κάλυψης

**1971** Ειδικές ομάδες απογραφέων απέγραψαν όσους ταξίδευαν με πλοίο, σιδηρόδρομο ή αεροπλάνο, εφόσον βρίσκονταν σε ελληνικό έδαφος

**1981** Αλλαγή στην ημερομηνία διεξαγωγής της Απογραφής λόγω ισχυρού σεισμού

**1991** Καθολική και όχι δειγματοληπτική επεξεργασία των απογραφικών δελτίων

**2001** Χρήση του συστήματος Αναγνώρισης Οπτικών Σημάτων (OMR) στην επεξεργασία των χάρτινων ερωτηματολογίων

**2011** Η πρώτη Απογραφή της Ελληνικής Στατιστικής Αρχής (ΕΛΣΤΑΤ), ως Ανεξάρτητης Αρχής

**2021** Η πρώτη ηλεκτρονική Αυτοαπογραφή

# 3 ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Η ΕΛΣΤΑΤ, στο πλαίσιο της στρατηγικής της για την «Ανάπτυξη της Στατιστικής Παιδείας στην Ελλάδα», διοργανώνει, από το 2017, τον «Πανελλήνιο Διαγωνισμό στη Στατιστική». Σκοπός του διαγωνισμού είναι η ανάδειξη ταλαντούχων μαθητών που ενδιαφέρονται για τη στατιστική επιστήμη, τον τρόπο παραγωγής και τη χρήση των επίσημων στατιστικών στην καθημερινότητά τους, αλλά και σε άλλους τομείς της κοινωνίας. Το 2021 πραγματοποιήθηκε ο 4ος Διαγωνισμός Στατιστικής.


### Λίγα λόγια για την Α΄ φάση του Διαγωνισμού

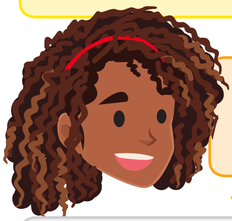
Η Α΄ φάση του Διαγωνισμού πραγματοποιείται μέσω διαδικτυακής πλατφόρμας και αποτελείται από τα τρία ακόλουθα τεστ με ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής:

1. τεστ βασικών στατιστικών γνώσεων,
2. τεστ για τη χρήση των πηγών των επίσημων στατιστικών δεδομένων,
3. τεστ για τη χρήση infographics, ως πηγές επίσημων στατιστικών δεδομένων.

Οι ερωτήσεις αυτές (10 σε κάθε τεστ) έχουν τέσσερις πιθανές απαντήσεις, εκ των οποίων μία μόνο είναι η σωστή.

## 3.1 Μεταθέσεις

Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν σε σειρά οι 10 ερωτήσεις της Α΄ φάσης του διαγωνισμού **που περιλαμβάνει** κάθε τεστ;



Η τοποθέτηση σε σειρά των 10 ερωτήσεων κάθε τεστ είναι η διάταξη (χωρίς επαναλήψεις) των 10 αντικειμένων ανά 10.

**Σχέση διάταξης – μετάθεσης: Η διάταξη ν** αντικειμένων (χωρίς επαναλήψεις) ανά **ν** λέγεται **μετάθεση** των **ν** αντικειμένων.

**Μαθαίνω**

**Μετάθεση $\nu$** διαφορετικών αντικειμένων ονομάζεται η διάταξη χωρίς επαναλήψεις των $\nu$ αντικειμένων ανά $\nu$.

Το πλήθος των μεταθέσεων $\nu$ αντικειμένων συμβολίζεται με $M_\nu$ και δίνεται από τη σχέση:

$\mathbf{M_\nu = \nu!}$

**3.1.α** Υπολογίστε το πλήθος των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούν να τοποθετηθούν σε σειρά οι 10 ερωτήσεις κάθε τεστ.

$M_{10} = 10! =$ ______ (i)

Για τον υπολογισμό μπορείς να χρησιμοποιήσεις τη συνάρτηση FACT του EXCEL ή κάποιον υπολογιστή τσέπης.

## 3.2 Επαναληπτικές μεταθέσεις

Στο τεστ βασικών στατιστικών γνώσεων της Α΄ φάσης (εκδοχή 1) του 4ου Διαγωνισμού στη Στατιστική για την Κατηγορία Λύκεια, υπήρχαν 10 ερωτήσεις τεσσάρων πολλαπλών επιλογών (A, B, C, D).

**Αρχική σειρά ερωτήσεων**

| Θέση ερώτησης | Ερώτηση | Γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση |
|---|---|---|
| 1η | ερ. 1 | D |
| 2η | ερ. 2 | C |
| 3η | ερ. 3 | C |
| 4η | ερ. 4 | D |
| 5η | ερ. 5 | D |
| 6η | ερ. 6 | A |
| 7η | ερ. 7 | A |
| 8η | ερ. 8 | B |
| 9η | ερ. 9 | A |
| 10η | ερ. 10 | A |

Πίνακας 1

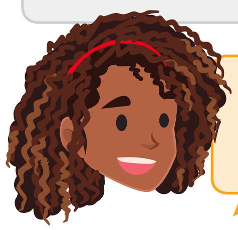
**Αλλαγή σειράς ερωτήσεων (παράδειγμα)**

| Αλλαγή θέσης ερώτησης | Θέση ερώτησης | Ερώτηση | Γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή ερώτηση |
|---|---|---|---|
| ερ.2 → 1η θέση | 1η | ερ. 2 | C |
| ερ.7 → 2η θέση | 2η | ερ. 7 | A |
| ερ.3 | 3η | ερ. 3 | C |
| ερ.1 → 4η θέση | 4η | ερ. 1 | D |
| ερ.5 | 5η | ερ. 5 | D |
| ερ.10 → 6η θέση | 6η | ερ. 10 | A |
| ερ.4 → 7η θέση | 7η | ερ. 4 | D |
| ερ.8 | 8η | ερ. 8 | B |
| ερ.9 | 9η | ερ. 9 | A |
| ερ.6 → 10η θέση | 10η | ερ. 6 | A |

Πίνακας 2

- σε 4 ερωτήσεις η σωστή απάντηση συμβολίζεται με το γράμμα A,
- σε 1 ερώτηση η σωστή απάντηση συμβολίζεται με το γράμμα B,
- σε 2 ερωτήσεις η σωστή απάντηση συμβολίζεται με το γράμμα C,
- σε 3 ερωτήσεις η σωστή απάντηση συμβολίζεται με το γράμμα D.

Πόσες διαφορετικές σειρές σωστών απαντήσεων (A, B, C, D) μπορούν να προκύψουν από την τοποθέτηση σε σειρά των 10 ερωτήσεων;



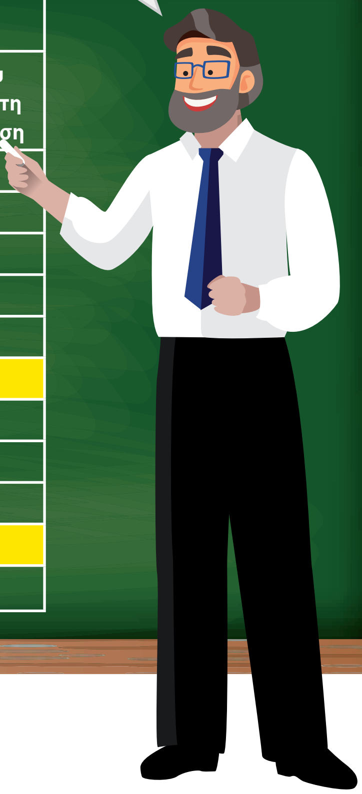
Στον Πίνακα 2 παρατηρούμε ότι η διαφορετική σειρά τοποθέτησης των ερωτήσεων μπορεί να διαφοροποιεί τη στήλη με τις σωστές απαντήσεις, όπως φαίνεται στα πορτοκαλί κελιά, ή να μην προκαλεί διαφοροποίηση, όπως φαίνεται στα κίτρινα.

Παρατηρήστε, όμως, ότι κάθε μετάθεση των 10 ερωτήσεων δεν δημιουργεί απαραίτητα διαφορετική σειρά σωστών απαντήσεων.

**Αλλαγή σειράς ερωτήσεων χωρίς να αλλάζει η σειρά απαντήσεων**

| **Αλλαγή θέσης ερώτησης** | **Θέση ερώτησης** | **Ερώτηση** | **Γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή ερώτηση** |
|---|---|---|---|
| ερ.1 | 1η | ερ. 1 | C |
| ερ.2 | 2η | ερ. 2 | A |
| ερ.3 | 3η | ερ. 3 | C |
| ερ.4 | 4η | ερ. 4 | D |
| ερ.5 | 5η | ερ. 5 | D |
| ερ.10->6η θέση | 6η | ερ.10 | A |
| ερ.7 | 7η | ερ. 7 | D |
| ερ.8 | 8η | ερ. 8 | B |
| ερ.9 | 9η | ερ. 9 | A |
| ερ.6->10η θέση | 10η | ερ. 6 | A |

Πίνακας 2



Πράγματι, όταν ανταλλάσσουν θέση ερωτήσεις, όπως οι ερωτήσεις 6 και 10 που έχουν και οι δύο το γράμμα A ως σωστή απάντηση, προκύπτει η ίδια σειρά σωστών απαντήσεων.

Κάθε διαφορετική σειρά σωστών απαντήσεων (A, B, C, D), που προκύπτει από την τοποθέτηση σε σειρά των 10 ερωτήσεων, λέγεται **επαναληπτική μετάθεση**.

**!**

**Μαθαίνω**

**Επαναληπτική μετάθεση ν** αντικειμένων ονομάζεται η μετάθεση **ν** αντικειμένων που δεν είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους.

Το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων **ν** αντικειμένων, από τα οποία

τα $\kappa_1$ είναι ίδια μεταξύ τους και διαφορετικά από τα υπόλοιπα,

τα $\kappa_2$ είναι ίδια μεταξύ τους και διαφορετικά από τα υπόλοιπα,

…

…

τα $\kappa_\mu$ είναι ίδια μεταξύ τους και διαφορετικά από τα υπόλοιπα,

συμβολίζεται με $M_\nu^\varepsilon$ και δίνεται από τη σχέση:

$$M_\nu^\varepsilon = \frac{\nu!}{\kappa_1!\kappa_2!\ldots\kappa_\mu!} \quad \text{όπου} \quad \nu = \kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_\mu$$

Ο εκθέτης **ε** του $M_\nu^\varepsilon$ συμβολίζει την **ε**παναληπτική μετάθεση.

Κάθε διαφορετική σειρά σωστών απαντήσεων των 10 ερωτήσεων αντιστοιχεί σε μια επαναληπτική μετάθεση 10 στοιχείων, από τα οποία τα A είναι 4 ($\kappa_1 = 4$), τα B είναι 1 ($\kappa_2 = 1$), τα C είναι 2 ($\kappa_3 = 2$) και τα D είναι 3 ($\kappa_4 = 3$).

**3.2.α** Γνωρίζοντας ότι $\kappa_1 = 4$, $\kappa_2 = 1$, $\kappa_3 = 2$ και $\kappa_4 = 3$, υπολογίστε το πλήθος των διαφορετικών σειρών σωστών απαντήσεων που μπορούν να προκύψουν από την τοποθέτηση σε σειρά των $\nu = 10$ ερωτήσεων:

$$M_{10}^{\varepsilon} = \boxed{\frac{\qquad}{\qquad}} = \boxed{\qquad} \quad \text{(i)}$$

## Λίγα λόγια για τη Β΄ φάση του Διαγωνισμού

Οι διαγωνιζόμενες ομάδες που προκρίνονται στη Β΄ φάση του Διαγωνισμού καλούνται:

α) να πραγματοποιήσουν ανάλυση ενός συνόλου δεδομένων, σε excel, το οποίο δίνεται από τους διοργανωτές του Διαγωνισμού της ΕΛΣΤΑΤ,

β) να παρουσιάσουν, χρησιμοποιώντας power point, τα αποτελέσματα.

Με την ολοκλήρωση του Πανελλήνιου Διαγωνισμού στη Στατιστική, το κάθε μέλος, καθώς και ο επιβλέπων καθηγητής της νικήτριας ομάδας κάθε κατηγορίας (κατηγορία Α και κατηγορία Β), λαμβάνουν από ένα tablet, το Δίπλωμα διάκρισης και εκπαιδευτικό υλικό της ΕΛΣΤΑΤ και της Eurostat.

## 3.3 Εφαρμογή

**3.3.α** Στον 4ο Διαγωνισμό στη Στατιστική της ΕΛΣΤΑΤ, οι ομάδες BYSSATEAM και BAYES βρέθηκαν στην πρώτη θέση των Κατηγοριών Α και Β, αντίστοιχα.

**Πόσοι διαφορετικοί αναγραμματισμοί** της λέξης BYSSATEAM υπάρχουν;

Κάθε αναγραμματισμός της λέξης BYSSATEAM είναι μία ______ **(i)** μετάθεση 9 αντικειμένων (γραμμάτων), όπου καθένα από τα αντικείμενα (γράμματα) «A» και «S» επαναλαμβάνεται ______ **(ii)** φορές, ενώ τα υπόλοιπα 5 αντικείμενα (γράμματα) «B», «Y», «T», «E» και «M» εμφανίζονται μόνο μία φορά.

Το πλήθος των διαφορετικών αναγραμματισμών της λέξης BYSSATEAM είναι:

$$M_9^{\varepsilon} = \frac{\quad\quad}{\quad\quad} = \quad\quad \textbf{(iii)}$$

Πόσοι από τους παραπάνω αναγραμματισμούς τελειώνουν σε «TEAM»;

Οι αναγραμματισμοί της λέξης «BYSSATEAM» που τελειώνουν σε «TEAM» προκύπτουν από δύο ενέργειες:

**Ενέργεια 1**. Αναγραμματισμοί της λέξης «BYSSA»

Κάθε αναγραμματισμός της λέξης «BYSSA» είναι μία ______ **(iv)** μετάθεση 5 αντικειμένων, όπου το αντικείμενο «S» επαναλαμβάνεται ______ **(v)** φορά/ές, ενώ τα υπόλοιπα 3 αντικείμενα εμφανίζονται ______ **(vi)** φορά/ές.

Επομένως, το πλήθος των διαφορετικών αναγραμματισμών της λέξης BYSSA (ενέργεια 1) είναι:

$$M_5^{\varepsilon} = \frac{\quad\quad}{\quad\quad} = \quad\quad \textbf{(vii)}$$

**Ενέργεια 2**. Προσθήκη της κατάληξης «TEAM»

Η προσθήκη της κατάληξης «TEAM» (ενέργεια 2) μπορεί να γίνει με έναν (1) μόνο τρόπο.

Επομένως, σύμφωνα με την αρχή του ______ **(viii)**, το πλήθος των διαφορετικών αναγραμματισμών της λέξης BYSSATEAM που τελειώνουν σε «TEAM» είναι:

$$\underbrace{\quad\quad}_{\text{(Ενέργεια 1)}} \cdot \underbrace{\quad\quad}_{\text{(Ενέργεια 2)}} = \quad\quad \textbf{(ix)}$$

**Πόσοι αναγραμματισμοί** της λέξης BAYES υπάρχουν;

Κάθε αναγραμματισμός της λέξης BAYES είναι μία ________ **(x)** 5 αντικειμένων, τα οποία είναι όλα ________ **(xi)** μεταξύ τους.

Επομένως, το πλήθος των διαφορετικών αναγραμματισμών της λέξης BAYES είναι:

$$M_5 = \boxed{\quad} = \boxed{\quad} \quad \textbf{(xii)}$$

Ο Thomas Bayes (1701 - 1761) ήταν Άγγλος στατιστικός που έχει δώσει το όνομά του στο «Θεώρημα Bayes», το οποίο εκφράζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}, \; P(B) \neq 0}$$

**3.3.6** Προσπαθήστε να αποδείξετε το θεώρημα Bayes με όσα μάθατε για τη δεσμευμένη πιθανότητα στο Κεφάλαιο 1.

**Φτιάξε την ομάδα σου και λάβε μέρος στον επόμενο Διαγωνισμό στη Στατιστική!**

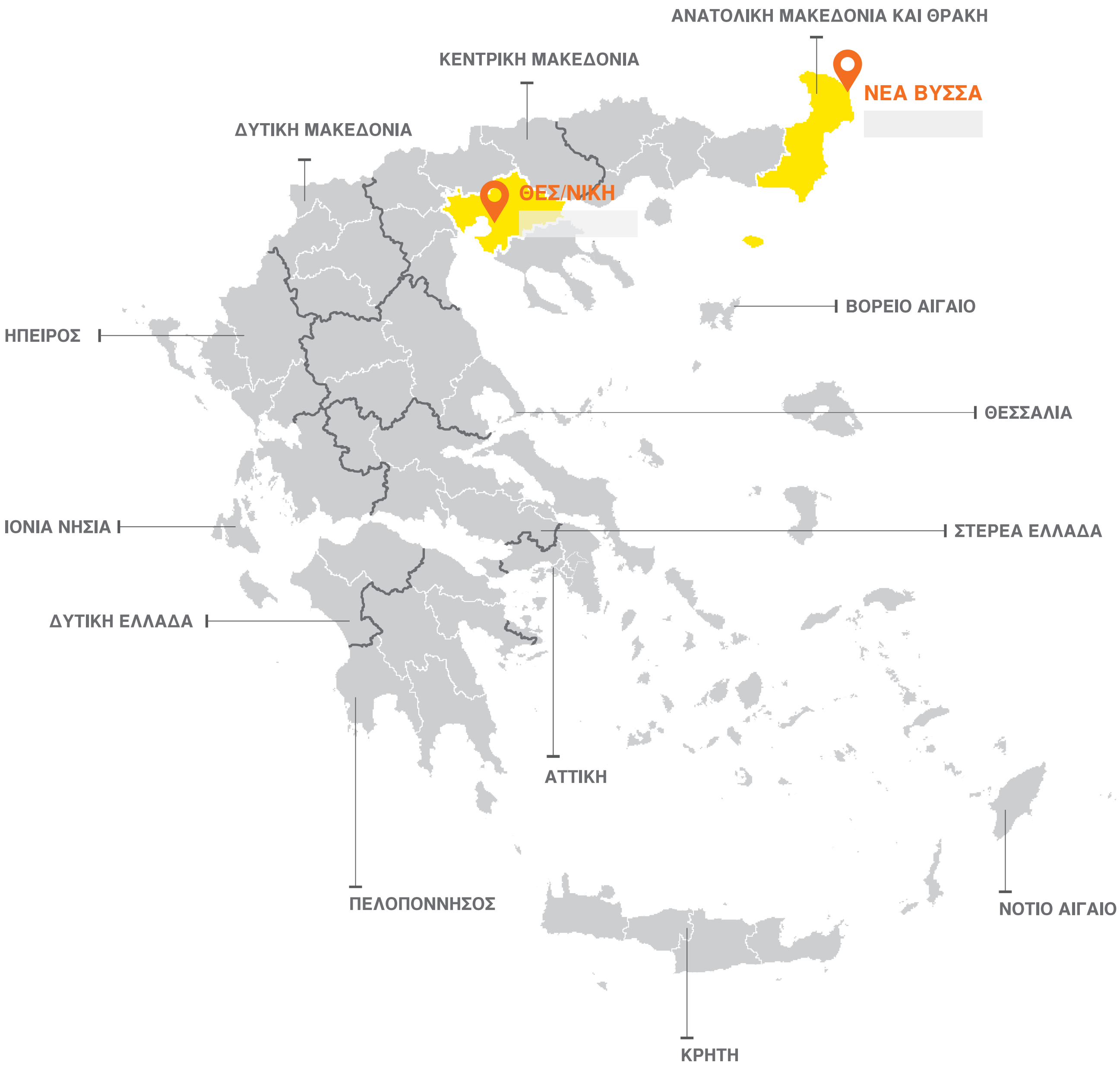
Μπορείς να βρεις περισσότερες πληροφορίες στην τοποθεσία:

**https://www.statistics.gr/el/edu-statistics-competition**

**3.4 Δραστηριότητα**

Οι νικήτριες ομάδες του 4ου Διαγωνισμού στη Στατιστική ήταν από σχολεία της Νέας Βύσσας Έβρου και της Θεσσαλονίκης.

Επισκεφθείτε την ιστοσελίδα της ΕΛΣΤΑΤ www.statistics.gr και αναζητήστε τον πληθυσμό των παραπάνω πόλεων στα πλέον πρόσφατα δημοσιευμένα στοιχεία της «Απογραφής Πληθυσμού - Κατοικιών». Στη συνέχεια, κάντε το ίδιο για την πόλη ή το χωριό σας ή οποιαδήποτε άλλη πόλη ή χωριό και αποτυπώστε τα ευρήματά σας στον χάρτη που ακολουθεί.




Πηγή: ΕΛΣΤΑΤ - Απογραφή Πληθυσμού - Κατοικιών 20_ _ .

# ΑΠΟΓΡΑΦΗ ΣΤΟ ΣΧΟΛΕΙΟ

www.statistics.gr/el/edu

Η Ελληνική Στατιστική Αρχή (ΕΛΣΤΑΤ), στο πλαίσιο της στρατηγικής για την «**Ανάπτυξη της Στατιστικής Παιδείας στην Ελλάδα**», σχεδίασε και έθεσε σε λειτουργία, για πρώτη φορά στην Ελλάδα, την ηλεκτρονική πλατφόρμα για την «Απογραφή στο Σχολείο».

## Απογραφή στο Σχολείο

είναι ένα εκπαιδευτικό πρόγραμμα, βασίζεται στο διεθνές έργο census@school που ξεκίνησε το 2000 από τη Στατιστική Υπηρεσία του Ηνωμένου Βασιλείου και υλοποιείται σε πολλές χώρες. Περιέχει εκπαιδευτικό υλικό με οδηγίες για τη διαδικασία και τις εργασίες διενέργειας μιας στατιστικής απογραφικής έρευνας. Με τον τρόπο αυτόν οι μαθητές λειτουργούν συλλέγοντας και αναλύοντας στατιστικά δεδομένα και κατανοούν ομοιότητες και διαφορές σε επίπεδο τμήματος, τάξης ή σχολικής μονάδας.

## Στόχος

του προγράμματος είναι η συνεισφορά στη στατιστική επιμόρφωση των μαθητών, καθώς και η ενίσχυση της στατιστικής παιδείας με τη χρήση των τεχνολογιών πληροφόρησης και επικοινωνιών (ΤΠΕ).

## Η ηλεκτρονική πλατφόρμα

http://censusschool.statistics.gr

Το εργαλείο που χρησιμοποιείται είναι η διαδικτυακή πλατφόρμα ασύγχρονης τηλεκπαίδευσης Moodle.

## Διαδικασία

1 Ο καθηγητής θα εγγράφεται στην πλατφόρμα.

2 Οι μαθητές του τμήματος θα μπαίνουν στην εφαρμογή και θα συμπληρώνουν ανώνυμα το ερωτηματολόγιο.

3 Ο καθηγητής θα λαμβάνει αρχείο με τις απαντήσεις των μαθητών.

4 Ο καθηγητής θα μπορεί να επαναλάβει την απογραφή σε διαφορετικά τμήματα και οι μαθητές να συγκρίνουν τα αποτελέσματα.

5 Μετά την ολοκλήρωση του προγράμματος, οι συμμετέχοντες καθηγητές λαμβάνουν βεβαίωση συμμετοχής.

## Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία:

- να μάθουν πώς διενεργείται μια απογραφική έρευνα,
- να συλλέξουν και να αναλύσουν δεδομένα,
- να διατυπώσουν τα ερευνητικά τους ερωτήματα,
- να παρουσιάσουν και να συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους.

## Οι ρόλοι του συστήματος είναι:

**ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΤΗΣ**
έχει πλήρη πρόσβαση σε όλα τα στοιχεία ελέγχου.

**ΔΙΔΑΣΚΩΝ**
μπορεί να υποβάλει αίτηση απόκτησης πρόσβασης στην πλατφόρμα.

**ΜΑΘΗΤΗΣ**
μπορεί να παρακολουθεί τη ροή της εκπαιδευτικής δραστηριότητας που του προσφέρεται για ένα μάθημα.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΡΧΗ

#GreekDataMatter

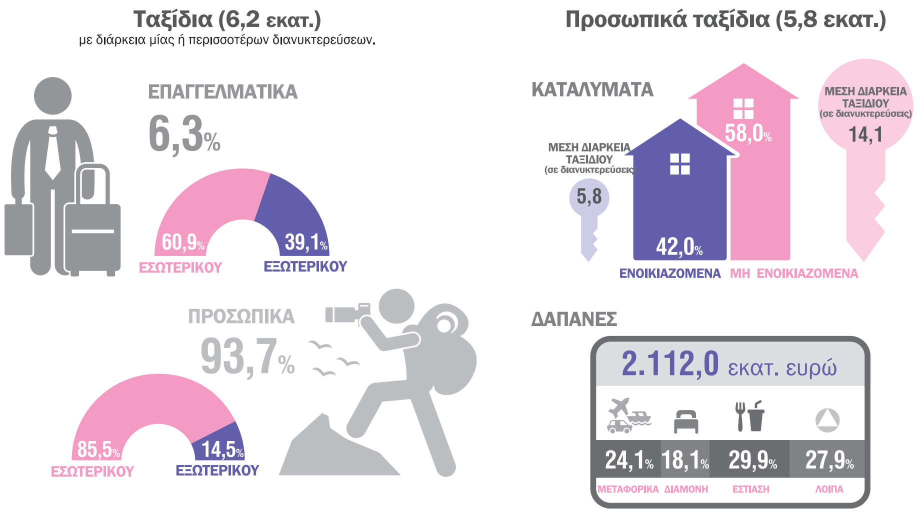
Hellenic Statistical Authority @StatisticsGR ELSTAT statistics.gr

# 4 ΤΑ ΤΑΞΙΔΙΑ ΤΩΝ ΚΑΤΟΙΚΩΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

## Λίγα λόγια για την έρευνα

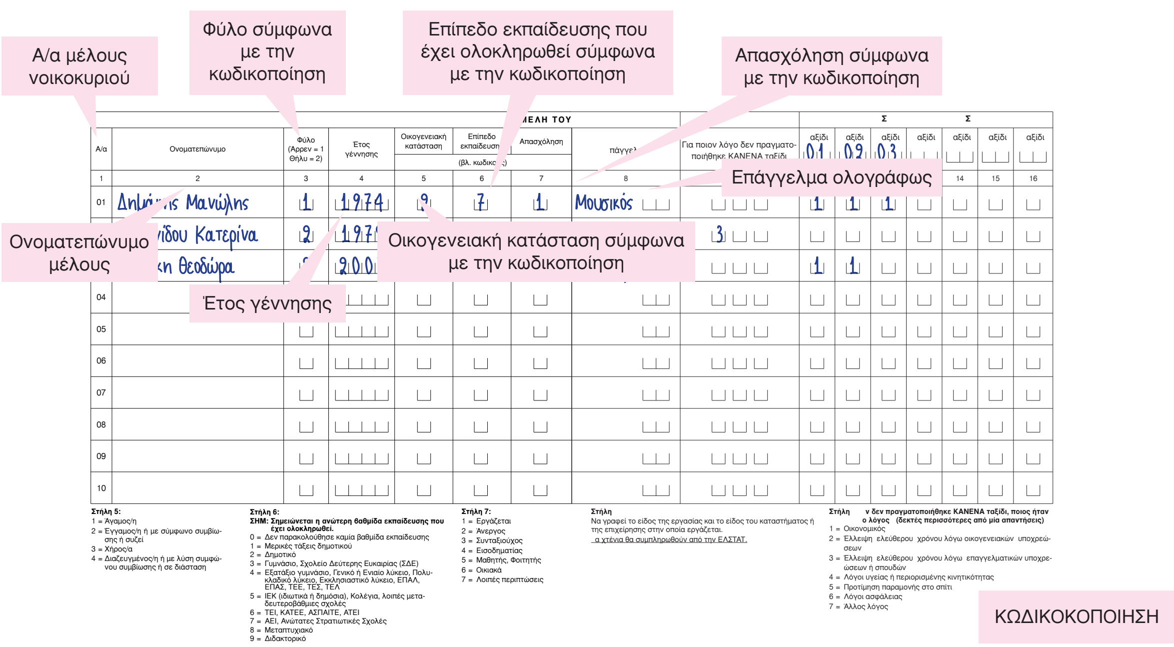
**Η Έρευνα Ποιοτικών Χαρακτηριστικών Ημεδαπών Τουριστών** είναι ετήσια έρευνα που πραγματοποιείται σε δείγμα των νοικοκυριών της Χώρας και συλλέγει στοιχεία για τα ταξίδια τους. Η έρευνα διενεργείται σε όλα τα κράτη μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης με κοινά πρότυπα και μεθόδους και τα συλλεγόμενα στοιχεία αξιοποιούνται στη χάραξη της εθνικής και ευρωπαϊκής πολιτικής στον τομέα του τουρισμού. Στο ακόλουθο infographic αποτυπώνονται τα βασικά αποτελέσματα αυτής της έρευνας για το έτος 2019:

### Ταξίδια των κατοίκων της Ελλάδος ηλικίας 15 ετών και άνω, 2019

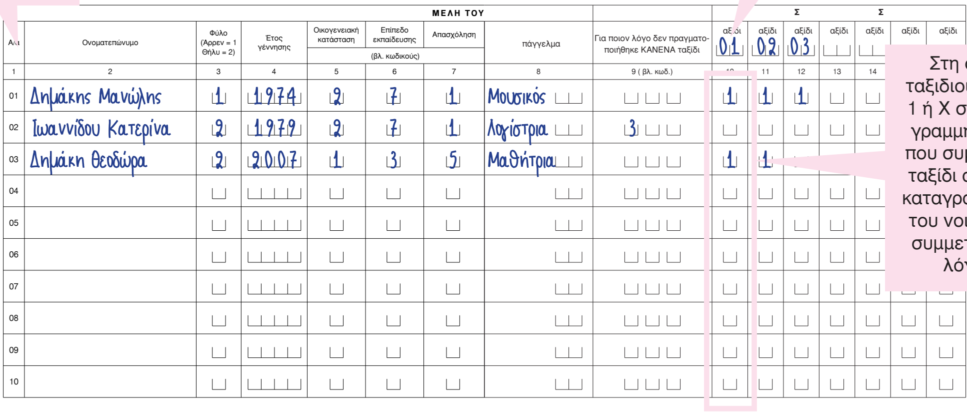



## Πώς γίνεται η έρευνα

Για κάθε νοικοκυριό που συμμετέχει στην έρευνα συμπληρώνεται το σχετικό ερωτηματολόγιο. Στο ερωτηματολόγιο καταγράφονται αρχικά όλα τα μέλη του νοικοκυριού με τα κύρια χαρακτηριστικά τους, όπως φύλο, εκπαίδευση, απασχόληση κ.λπ.



Στη συνέχεια, για κάθε μέλος του νοικοκυριού σημειώνονται τα ταξίδια στα οποία συμμετείχε.




| ΜΕΛΗ ΤΟΥ | | | | | | | | | Σ | | | Σ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Α/α | Ονοματεπώνυμο | Φύλο (Άρρεν = 1 Θήλυ = 2) | Έτος γέννησης | Οικογενειακή κατάσταση (βλ. κωδικούς) | Επίπεδο εκπαίδευσης (βλ. κωδικούς) | Απασχόληση (βλ. κωδικούς) | πάγγελμα | Για ποιον λόγο δεν πραγματοποιήθηκε ΚΑΝΕΝΑ ταξίδι | αξίδι 01 | αξίδι 02 | αξίδι 03 | αξίδι | αξίδι | αξίδι | αξίδι |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 ( βλ. κωδ.) | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | | |
| 01 | Δημάκης Μανώλης | 1 | 1974 | 2 | 7 | 1 | Μουσικός | | 1 | 1 | 1 | | | | |
| 02 | Ιωαννίδου Κατερίνα | 2 | 1979 | 2 | 7 | 1 | Λογίστρια | 3 | | | | | | | |
| 03 | Δημάκη Θεοδώρα | 2 | 2007 | 1 | 3 | 5 | Μαθήτρια | | 1 | 1 | | | | | |
| 04 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 05 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 06 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 07 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 08 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 09 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | | | | | |

## 4.1 Συνδυασμοί

Το νοικοκυριό μιας οικογένειας που συμμετέχει στην έρευνα αποτελείται από 5 μέλη. Σε ένα ταξίδι της οικογένειας συμμετείχαν 2 από τα 5 μέλη του νοικοκυριού. Πόσοι διαφορετικοί συνδυασμοί υπάρχουν για τα μέλη που συμμετείχαν σε αυτό το ταξίδι;

**!** Σε αυτήν την περίπτωση, δεν μας ενδιαφέρει η σειρά. Για παράδειγμα, είτε δηλωθεί ότι συμμετείχαν στο ταξίδι η γιαγιά και η μαμά είτε η μαμά και η γιαγιά, πρόκειται για τον ίδιο συνδυασμό ατόμων.

Κατά την επιλογή των 2 ατόμων από ένα 5μελές νοικοκυριό, δεν **μας ενδιαφέρει** η σειρά με την οποία επιλέγονται τα άτομα αλλά **ποια** είναι τα **άτομα** που **επιλέγονται**. Δηλαδή μας ενδιαφέρει ο **συνδυασμός των ατόμων**.

**Μαθαίνω**

**Συνδυασμός ν** διαφορετικών αντικειμένων ανά **κ** λέγεται κάθε ομάδα των **κ** από τα **ν** αντικείμενα, όταν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησής τους.

Το **πλήθος των συνδυασμών ν** διαφορετικών αντικειμένων **ανά κ** συμβολίζεται $\binom{\nu}{\kappa}$ και

δίνεται από τον τύπο: $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$

**4.1.α** Υπολογίστε το πλήθος των διαφορετικών συνδυασμών των 5 μελών του νοικοκυριού ανά 2:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3} = \boxed{\phantom{00}} \quad \text{(i)}$$

## 4.2 Αρχή του αθροίσματος


Αν σε ένα ταξίδι συμμετείχαν **τουλάχιστον** 4 από τα 5 μέλη ενός νοικοκυριού, **πόσοι διαφορετικοί συνδυασμοί** υπάρχουν για τα μέλη που συμμετείχαν σε αυτό το ταξίδι;

Αφού συμμετείχαν **τουλάχιστον** 4 από τα 5 μέλη, αυτό σημαίνει ότι **συμμετείχαν είτε 4 μέλη είτε 5 μέλη του νοικοκυριού**.

Θα βρούμε λοιπόν το πλήθος των συνδυασμών «5 ανά 4» και «5 ανά 5».


Και επειδή η συμμετοχή ακριβώς 4 μελών του νοικοκυριού στο ταξίδι αποκλείει τη συμμετοχή ακριβώς 5 μελών, αθροίζουμε τα επιμέρους πλήθη συνδυασμών που υπολογίσαμε. Ο παραπάνω συλλογισμός ονομάζεται **«αρχή του αθροίσματος».**

**Μαθαίνω**

Σύμφωνα με την **«αρχή του αθροίσματος»**, αν υπάρχουν

$\nu_1$ τρόποι για να κάνεις την ενέργεια $\varepsilon_1$

$\nu_2$ τρόποι για κάνεις την ενέργεια $\varepsilon_2$

..................................

.................................

$\nu_\kappa$ τρόποι για να κάνεις την ενέργεια $\varepsilon_\kappa$

τότε **υπάρχουν $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa$ τρόποι για να κάνεις την ενέργεια $\varepsilon_1$ ή την ενέργεια $\varepsilon_2$ ή … ή την ενέργεια $\varepsilon_\kappa$**

με την **προϋπόθεση ότι η πραγματοποίηση μιας ενέργειας αποκλείει όλες τις άλλες.**

**4.2.α** Υπολογίστε το πλήθος των διαφορετικών συνδυασμών,

- **των 5 μελών του νοικοκυριού ανά 4:**

Συνδυασμοί 5 ανά 4: $\binom{\square}{\square} = \dfrac{\square!}{\square!\,\square!} = \square$ **(i)**

- **των 5 μελών του νοικοκυριού ανά 5:**

Συνδυασμοί 5 ανά 5: $\binom{\square}{\square} = \dfrac{\square!}{\square!\,\square!} = \square$ **(ii)**

**Θυμάμαι**

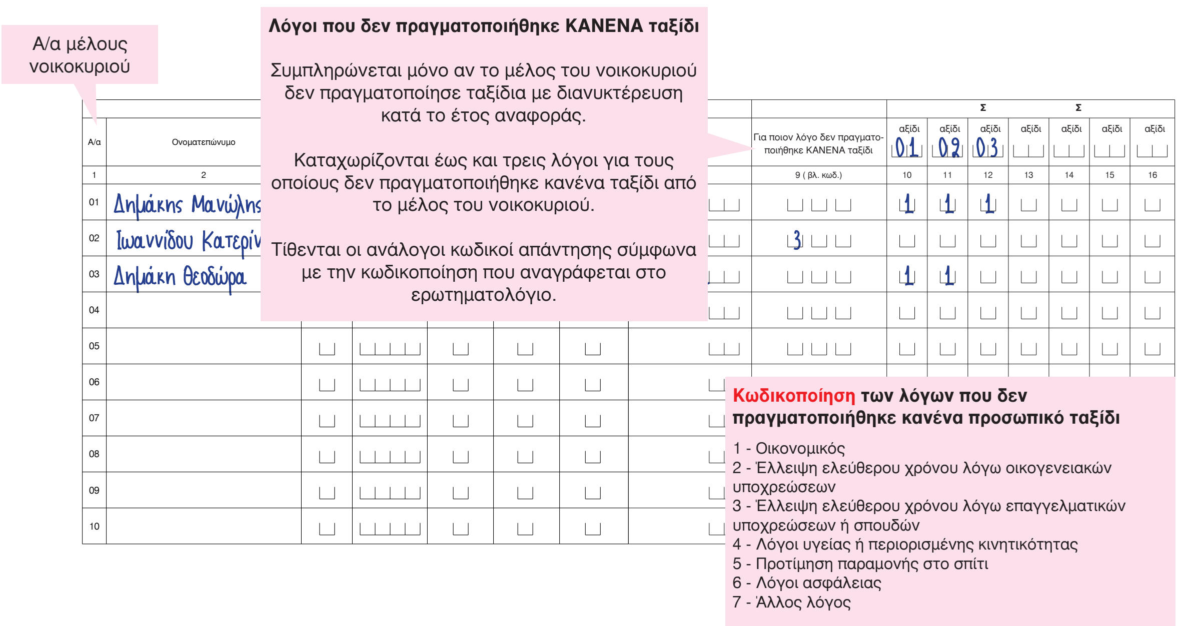
Εξ ορισμού ισχύει $0! = 1$

Στη συνέχεια, εφαρμόζω την «αρχή του αθροίσματος», για να βρω το πλήθος των διαφορετικών συνδυασμών των μελών ενός 5μελούς νοικοκυριού που συμμετείχαν σε ένα ταξίδι με τουλάχιστον 4 συμμετέχοντες.

$\square + \square = \square$ **(iii)**

## 4.3 Εφαρμογή

Στην ίδια έρευνα, οι ερευνώμενοι που δεν πραγματοποίησαν κανένα τουριστικό ταξίδι κατά τη διάρκεια του έτους καλούνται να επιλέξουν έως 3 λόγους ανάμεσα από 7 επιλογές (αιτίες).



**4.3.α** Πόσοι διαφορετικοί συνδυασμοί απαντήσεων για τους λόγους μη πραγματοποίησης ταξιδιών υπάρχουν:

**Όταν επιλέγεται μόνο ένας λόγος** από τους ερευνωμένους;

Το πλήθος των διαφορετικών συνδυασμών 7 λόγων ανά ____ **(i)** είναι:

$$\binom{7}{1} = \frac{\square!}{\square!\,\square!} = \square \quad \textbf{(ii)}$$

**Όταν επιλέγονται ακριβώς δύο λόγοι** από τους ερευνωμένους;

Το πλήθος των διαφορετικών συνδυασμών 7 λόγων ανά ____ **(iii)** είναι:

$$\binom{7}{2} = \frac{\square!}{\square!\,\square!} = \square \quad \textbf{(iv)}$$

**Όταν επιλέγονται ακριβώς τρεις λόγοι** από τους ερευνωμένους;

Το πλήθος των διαφορετικών συνδυασμών 7 λόγων ανά ____ **(v)** είναι:

$$\binom{7}{3} = \frac{\square!}{\square!\,\square!} = \square \quad \textbf{(vi)}$$

**Όταν επιλέγονται τουλάχιστον ένας και το πολύ τρεις λόγοι** από τους ερευνωμένους;

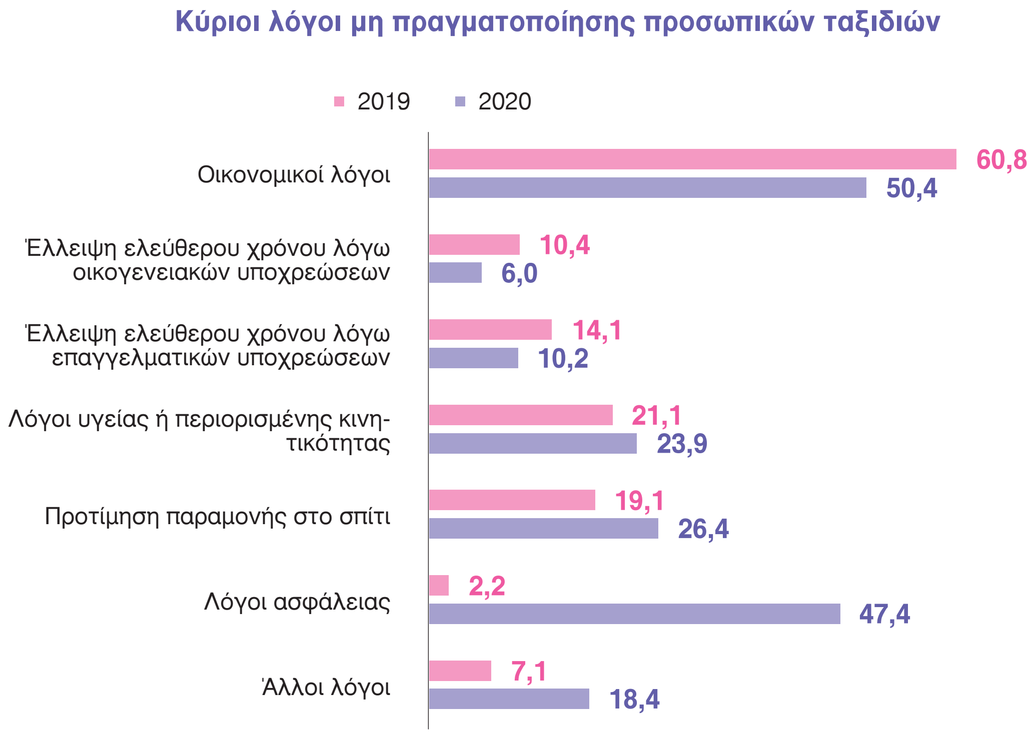
Όταν επιλέγονται τουλάχιστον ένας και το πολύ τρεις λόγοι, αυτό σημαίνει ότι επιλέγονται ή ακριβώς ένας ή ακριβώς δύο ή ακριβώς τρεις.

Σύμφωνα με την αρχή του ____________ **(vii)**, το πλήθος των διαφορετικών συνδυασμών που μπορούν να σχηματιστούν, όταν επιλέγονται τουλάχιστον ένας και το πολύ τρεις λόγοι μη πραγματοποίησης ταξιδιών, είναι:

$$7 + \square + \square = \square \quad \textbf{(viii)}$$

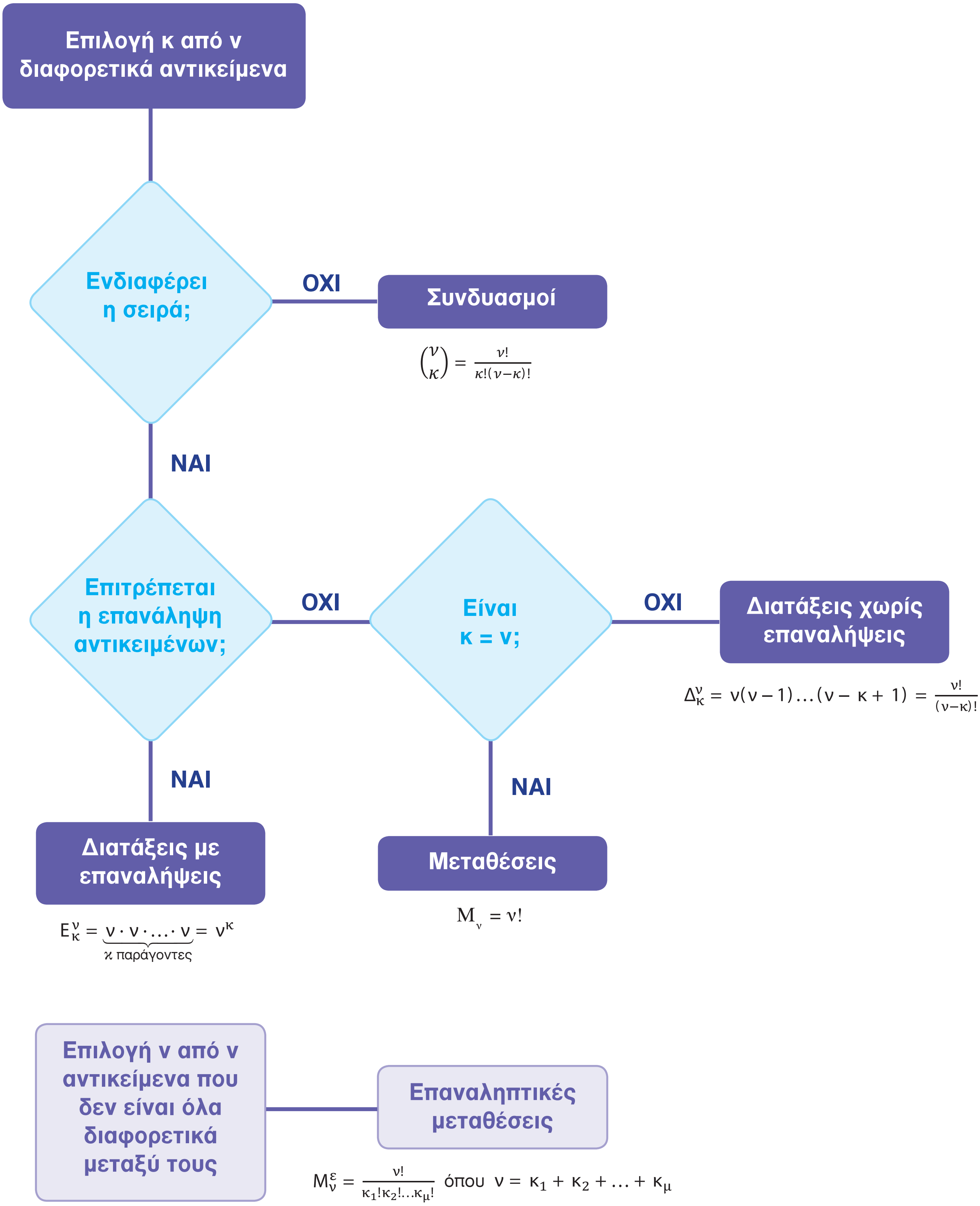
4.3.6 Στο παρακάτω γράφημα αποτυπώνονται οι αιτίες μη πραγματοποίησης προσωπικών ταξιδιών (%) που δήλωσαν οι ερευνώμενοι για τα έτη 2019 και 2020.

- Παρατηρείτε κάποια σημαντική αλλαγή στις αιτίες μη πραγματοποίησης προσωπικών ταξιδιών το 2020 σε σύγκριση με το 2019;
- Τι σκέπτεστε για αυτήν την αλλαγή και πού θα μπορούσε να οφείλεται;




Οι ερευνώμενοι είχαν τη δυνατότητα να επιλέξουν από μία έως τρεις αιτίες μη πραγματοποίησης προσωπικών ταξιδιών.

# ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ - ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ - ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ
## Συνοπτική απεικόνιση



# 5 ΕΡΕΥΝΑ ΕΡΓΑΤΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ 2020

Οι Στατιστικές Υπηρεσίες όλων των κρατών (στην Ελλάδα η ΕΛΣΤΑΤ) διενεργούν την έρευνα εργατικού δυναμικού χρησιμοποιώντας κοινά πρότυπα και μεθόδους για να εκτιμήσουν το μέγεθος της απασχόλησης και της ανεργίας. Με τον τρόπο αυτόν εξασφαλίζεται η συγκρισιμότητα των εκτιμήσεων της ανεργίας μεταξύ τους διαχρονικά, αλλά και μεταξύ κρατών, καθώς οι εν λόγω ορισμοί είναι οι μοναδικοί επίσημοι ορισμοί που χρησιμοποιούνται παγκοσμίως.

Η Έρευνα Εργατικού Δυναμικού είναι δειγματοληπτική και διενεργείται στην Ελλάδα από το 1981 στα νοικοκυριά της Χώρας. Βασικός σκοπός της είναι η κατανομή του πληθυσμού εργάσιμης ηλικίας (15 ετών και άνω) σε τρεις πλήρως διακριτές ομάδες:

- **Απασχολούμενοι:** τα άτομα ηλικίας 15 έως 89 ετών που την εβδομάδα αναφοράς είτε εργάστηκαν έστω και μία ώρα με σκοπό την αμοιβή ή το κέρδος είτε εργάστηκαν στην οικογενειακή επιχείρηση είτε δεν εργάστηκαν αλλά είχαν μια εργασία ή επιχείρηση από την οποία απουσίαζαν προσωρινά.
- **Άνεργοι:** τα άτομα ηλικίας 15 έως 74 ετών που δεν εργάζονταν αλλά ήταν άμεσα διαθέσιμα για εργασία και αναζητούσαν ενεργά εργασία τις τελευταίες τέσσερις εβδομάδες.
- **Άτομα εκτός του εργατικού δυναμικού:** τα άτομα που δεν χαρακτηρίζονται απασχολούμενοι ή άνεργοι.

Οι **απασχολούμενοι** και οι **άνεργοι** αποτελούν το **εργατικό δυναμικό**.

Το **ποσοστό ανεργίας** υπολογίζεται από το **πηλίκο των ανέργων** διά του **εργατικού δυναμικού**.

Στην έρευνα συλλέγονται πρόσθετες πληροφορίες, όπως τα χαρακτηριστικά της κύριας εργασίας, η προηγούμενη εργασιακή εμπειρία και η αναζήτηση εργασίας, το επίπεδο εκπαίδευσης, καθώς και η συμμετοχή στην εκπαίδευση.

Θα πρέπει να τονιστεί ότι δεν πρέπει να γίνεται σύγχυση μεταξύ «ανέργου» και «εγγεγραμμένου ανέργου στις υπηρεσίες απασχόλησης», στην Ελλάδα στη Δημόσια Υπηρεσία Απασχόλησης - ΔΥΠΑ (πρώην ΟΑΕΔ). Σε όλες τις χώρες οι αριθμοί εμφανίζουν σημαντικές αποκλίσεις μιας και υπάρχουν διαφορές στους αντίστοιχους ορισμούς αλλά και στον τρόπο λειτουργίας των υπηρεσιών απασχόλησης μεταξύ των χωρών. Οι διαφορές ποικίλουν ανάλογα με τις ιδιαίτερες συνθήκες κάθε χώρας (π.χ. μέγεθος παραοικονομίας κ.λπ.) και κατά συνέπεια ο αριθμός των ανέργων διαφέρει από το πλήθος των εγγεγραμμένων ανέργων στα μητρώα των υπηρεσιών απασχόλησης.

## 5.1 Αποτελέσματα έρευνας

Στον Πίνακα 1 περιλαμβάνονται τα στοιχεία, για το 2020, που αφορούν στο εργατικό δυναμικό (δηλαδή στους «Απασχολουμένους» και τους «Ανέργους»). Τα πλήρη στοιχεία είναι διαθέσιμα στην ηλεκτρονική διεύθυνση http://www.statistics.gr/el/statistics/-/publication/SJO01.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 1**

| ΕΡΕΥΝΑ ΕΡΓΑΤΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ 2020 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Επίπεδο εκπαίδευσης | | | | |
| | | | έως Απολυτήριο Λυκείου, εξατάξιου Γυμνασίου ή ισότιμης τεχνικής επαγγελματικής σχολής | Πτυχίο ΙΕΚ ή ισότιμης σχολής μεταλυκειακής εκπαίδευσης | Πτυχίο Πανεπιστημίου ή ΤΕΙ | Μεταπτυχιακό-Διδακτορικό | ΣΥΝΟΛΟ |
| | | Συμβολισμός ενδεχομένων | Λ | Ι | Π | Μ | |
| Κατάσταση Απασχόλησης | Απασχολούμενοι | Ε | 2.003.791 | 417.711 | 1.183.189 | 270.788 | 3.875.479 |
| | Άνεργοι | Α | 451.558 | 103.800 | 174.246 | 25.378 | 754.982 |
| | Εργατικό Δυναμικό | Σ | 2.455.349 | 521.511 | 1.357.435 | 296.166 | 4.630.461 |

Είναι χρήσιμο να υπάρχει σημειογραφία για τις κατηγορίες που περιλαμβάνονται στον Πίνακα 1. Γι' αυτό και δημιουργήθηκαν η στήλη και η γραμμή «Συμβολισμός ενδεχομένων».

**Θυμάμαι**

Η πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο άτομο από το σύνολο των ατόμων του Εργατικού Δυναμικού να είναι, π.χ., «Απασχολούμενος», αντιστοιχεί στο ποσοστό του συνόλου των «Απασχολουμένων» ως προς το σύνολο του Εργατικού Δυναμικού.

**5.1.α** Αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο από το Εργατικό Δυναμικό της Χώρας για το 2020, υπολογίστε την πιθανότητα:

- να επιλεγεί ένα άτομο που είναι «Απασχολούμενος»

$$P(E) = \frac{\_\_\_\_\_}{4.630.461} \approx \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\ \% \quad \text{(i)}$$

- να επιλεγεί ένα άτομο που είναι «Άνεργος»

$$P(A) = 1 - P(\_\_) = 1 - \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\ \% \quad \text{(ii)}$$

- να επιλεγεί ένα άτομο που είναι «Άνεργος» δεδομένου ότι:

  – είναι έως και «Απόφοιτος Λυκείου, εξατάξιου Γυμνασίου ή ισότιμης τεχνικής επαγγελματικής σχολής»

$$P(A|Λ) = \frac{\text{πλήθος Ανέργων οι οποίοι έχουν έως και Απολυτήριο Λυκείου}}{\text{πλήθος ατόμων με το πολύ Απολυτήριο Λυκείου}} = \frac{\_\_\_\_\_}{2.455.349} \approx \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\ \% \quad \text{(iii)}$$

  – είναι «Πτυχιούχος ΙΕΚ ή ισότιμης σχολής μεταλυκειακής εκπαίδευσης»

$$P(A|I) = \frac{\text{πλήθος Ανέργων οι οποίοι έχουν και Πτυχίο ΙΕΚ}}{\text{πλήθος ατόμων με Πτυχίο ΙΕΚ}} = \frac{\_\_\_\_\_}{521.511} \approx \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\ \% \quad \text{(iv)}$$

  – είναι «Πτυχιούχος Πανεπιστημίου ή ΤΕΙ»

$$P(A|Π) = \frac{\text{πλήθος Ανέργων οι οποίοι έχουν και Πτυχίο Πανεπιστημίου}}{\text{πλήθος ατόμων με Πτυχίο Πανεπιστημίου}} = \frac{\_\_\_\_\_}{1.357.455} \approx \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\ \% \quad \text{(v)}$$

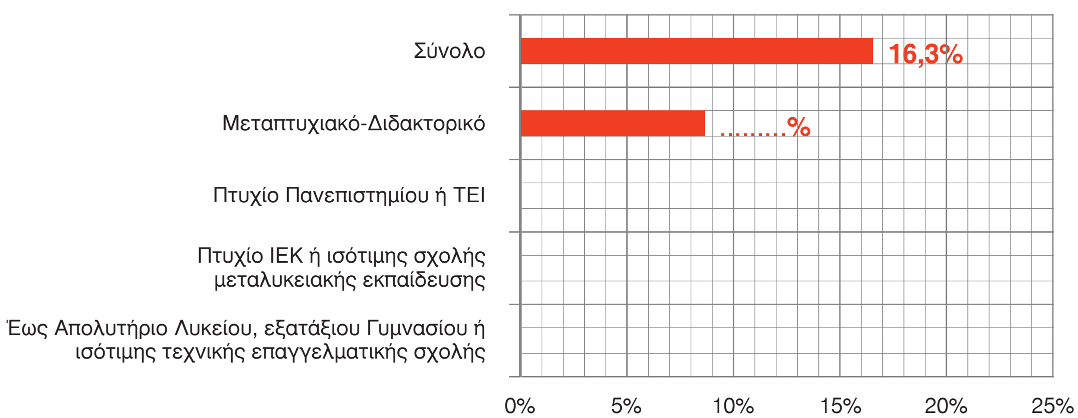
  – είναι κάτοχος «Μεταπτυχιακού - Διδακτορικού διπλώματος»

$$P(A|M) = \frac{\text{πλήθος Ανέργων οι οποίοι έχουν και Μεταπτυχιακό - Διδακτορικό}}{\text{πλήθος ατόμων με Μεταπτυχιακό - Διδακτορικό}} = \frac{\_\_\_\_\_}{296.166} \approx \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\ \% \quad \text{(vi)}$$

**5.1.β** Με βάση τους υπολογισμούς (5.1.α), συμπληρώστε τον κατωτέρω Πίνακα και στη συνέχεια ολοκληρώστε το ραβδόγραμμα που αποτυπώνει την πιθανότητα ένα τυχαία επιλεγμένο άτομο από το «Εργατικό Δυναμικό» να είναι «Άνεργος», ανά επίπεδο εκπαίδευσης.

**ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ (%) ΑΝΕΡΓΙΑΣ ΑΝΑ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ, 2020**

| | Επίπεδο εκπαίδευσης | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | έως Απολυτήριο Λυκείου, εξατάξιου Γυμνασίου ή ισότιμης τεχνικής επαγγελματικής σχολής | Πτυχίο ΙΕΚ ή ισότιμης σχολής μεταλυκειακής εκπαίδευσης | Πτυχίο Πανεπιστημίου ή ΤΕΙ | Μεταπτυχιακό-Διδακτορικό | ΣΥΝΟΛΟ |
| % Ανέργων | % | % | % | % | 16,3% |



## 5.2 Συλλογή στοιχείων

Για τη συλλογή των στοιχείων της Έρευνας Εργατικού Δυναμικού, ερευνητές της ΕΛΣΤΑΤ επικοινωνούν με τα νοικοκυριά του δείγματος, προκειμένου, μέσω συνέντευξης των μελών κάθε νοικοκυριού και με τη χρήση ερωτηματολογίου, να συλλεχθούν οι απαραίτητες πληροφορίες.

Ένας ερευνητής θα χρειαστεί να επικοινωνήσει με 10 νοικοκυριά του δείγματος σε διάστημα 3 ημερών, σύμφωνα με το εξής πρόγραμμα: την πρώτη ημέρα θα επικοινωνήσει με 5 νοικοκυριά, τη δεύτερη με 3 και την τρίτη με 2.

| | **1η ημέρα** | **2η ημέρα** | **3η ημέρα** |
|---|---|---|---|
| **Πλήθος νοικοκυριών** | 5 | 3 | 2 |

**5.2.α** Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καταμεριστούν τα νοικοκυριά στις 3 ημέρες, με βάση το παραπάνω πρόγραμμα;

Ο καταμερισμός των νοικοκυριών στις 3 ημέρες πραγματοποιείται με τρεις ενέργειες:

**Ενέργεια 1.** Επιλογή 5 νοικοκυριών για την 1η ημέρα

Η επιλογή των 5 νοικοκυριών θα γίνει ανάμεσα στα 10 νοικοκυριά του δείγματος. Η επιλογή αυτή, δεδομένου ότι δεν ενδιαφέρει η σειρά των νοικοκυριών, αποτελεί έναν συνδυασμό των 10 ανά 5.

Το πλήθος των συνδυασμών 10 ανά 5 είναι ____ **(i)**

**Ενέργεια 2.** Επιλογή 3 νοικοκυριών για τη 2η ημέρα

Η επιλογή θα γίνει ανάμεσα στα ____ **(ii)** νοικοκυριά του δείγματος, τα οποία απέμειναν μετά την Ενέργεια 1. Η επιλογή μιας ____ **(iii)** νοικοκυριών από 5 νοικοκυριά αποτελεί έναν συνδυασμό των ____ **(iv)**.

Το πλήθος αυτών είναι ____ **(v)**.

**Ενέργεια 3.** Επιλογή 2 νοικοκυριών για την 3η ημέρα

Η επιλογή της δυάδας των νοικοκυριών της 3ης ημέρας θα γίνει ανάμεσα στα ____ **(vi)** νοικοκυριά του δείγματος, τα οποία απέμειναν μετά τις Ενέργειες 1 και 2.
Η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει με ____ **(vii)** τρόπο/ους.

Επομένως, με βάση την αρχή του ____ **(viii)**, το πλήθος των διαφορετικών καταμερισμών των 10 νοικοκυριών στις 3 ημέρες είναι ____ **(ix)**.

Κυκλώστε τη σωστή απάντηση στους συλλογισμούς που ακολουθούν.

Την 1η ημέρα ο ερευνητής θα επικοινωνήσει με κάθε ένα από τα 5 νοικοκυριά Α, Β, Γ, Δ και Ε του δείγματος για τη διεξαγωγή της συνέντευξης και τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου της έρευνας.

**5.2.β** Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να πραγματοποιηθεί η σειρά της επικοινωνίας με τα 5 νοικοκυριά;

Η σειρά επικοινωνίας με τα 5 νοικοκυριά αποτελεί **(i)**:

**Α.** έναν συνδυασμό των 5 ανά 5 **Β.** μία μετάθεση των 5

Επομένως, η σειρά με την οποία θα γίνει η επικοινωνία με τα 5 νοικοκυριά μπορεί να πραγματοποιηθεί με **(ii)**:

**Α.** έναν (1) τρόπο **Β.** 15 τρόπους **Γ.** 120 τρόπους

**5.2.γ** Αν ο ερευνητής πρέπει να επικοινωνήσει πρώτα με το νοικοκυριό Α και στη συνέχεια με το νοικοκυριό Β, με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να πραγματοποιηθεί η σειρά επικοινωνίας του ερευνητή με το σύνολο των 5 νοικοκυριών Α, Β, Γ, Δ και Ε;

Η τοποθέτηση σε σειρά των 5 νοικοκυριών έτσι, ώστε στην πρώτη θέση να είναι το νοικοκυριό Α, στη δεύτερη θέση το νοικοκυριό Β ενώ στις 3 επόμενες θέσεις τα υπόλοιπα νοικοκυριά, αναλύεται σε 3 ενέργειες.

**Ενέργεια 1**. Τοποθέτηση του νοικοκυριού Α στην πρώτη θέση.
Η ενέργεια αυτή μπορεί να γίνει με **(i)**:

**Α.** έναν (1) τρόπο **Β.** δύο (2) τρόπους **Γ.** πέντε (5) τρόπους

**Ενέργεια 2.** Τοποθέτηση του νοικοκυριού Β στη δεύτερη θέση.
Η ενέργεια αυτή μπορεί να γίνει με **(ii)**:

**Α.** έναν (1) τρόπο **Β.** δύο (2) τρόπους **Γ.** τέσσερις (4) τρόπους

**Ενέργεια 3.** Τοποθέτηση των νοικοκυριών Γ, Δ και Ε στις υπόλοιπες θέσεις.
Η ενέργεια αυτή μπορεί να γίνει με **(iii)**:

**Α.** έναν (1) τρόπο **Β.** τρεις (3) τρόπους **Γ.** έξι (6) τρόπους

αφού κάθε τοποθέτηση σε σειρά των νοικοκυριών Γ, Δ και Ε είναι **(iv)**:

**Α.** ένας συνδυασμός των 3 ανά 3 **Β.** μία μετάθεση των 3

Επομένως, οι διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να πραγματοποιηθεί η σειρά της επικοινωνίας με τα 5 νοικοκυριά Α, Β, Γ, Δ και Ε έτσι, ώστε στην πρώτη θέση να είναι το νοικοκυριό Α και στη δεύτερη θέση το νοικοκυριό Β είναι **(v)**:

**Α.** δύο (2) τρόποι **Β.** πέντε (5) τρόποι **Γ.** έξι (6) τρόποι

Για να βρούμε το αποτέλεσμα (v) χρησιμοποιήσαμε τα αποτελέσματα (i), (ii) και (iii) και εφαρμόσαμε **(vi)**:

**Α.** την αρχή του γινομένου **Β.** την αρχή του αθροίσματος

**5.2.δ** Στην περίπτωση που η σειρά των συνεντεύξεων θα πραγματοποιηθεί τυχαία, ποια είναι η πιθανότητα να επικοινωνήσει ο ερευνητής την 1η ημέρα, πρώτα με το νοικοκυριό Α και αμέσως μετά με το νοικοκυριό Β **(i)**;

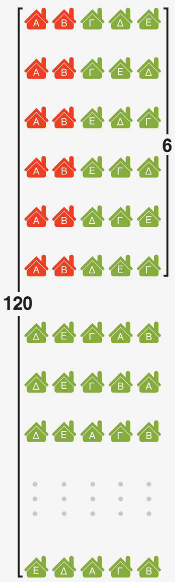
**Α.** 0,05% **Β.** 5,0% **Γ.** 4,2%

**Μαθαίνω**

Όταν τοποθετούμε τα 5 νοικοκυριά στη σειρά χωρίς κάποιο περιορισμό, δηλαδή όταν όλες οι θέσεις είναι **«ελεύθερες»**, τότε υπάρχουν 120 διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης των νοικοκυριών σε σειρά.

| 1η θέση | 2η θέση | 3η θέση | 4η θέση | 5η θέση |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

120 τρόποι

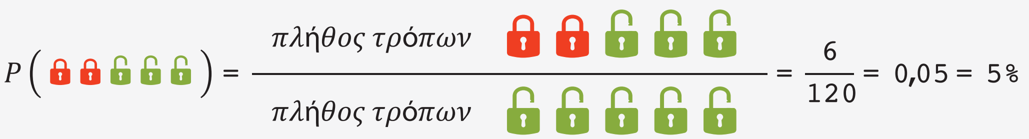


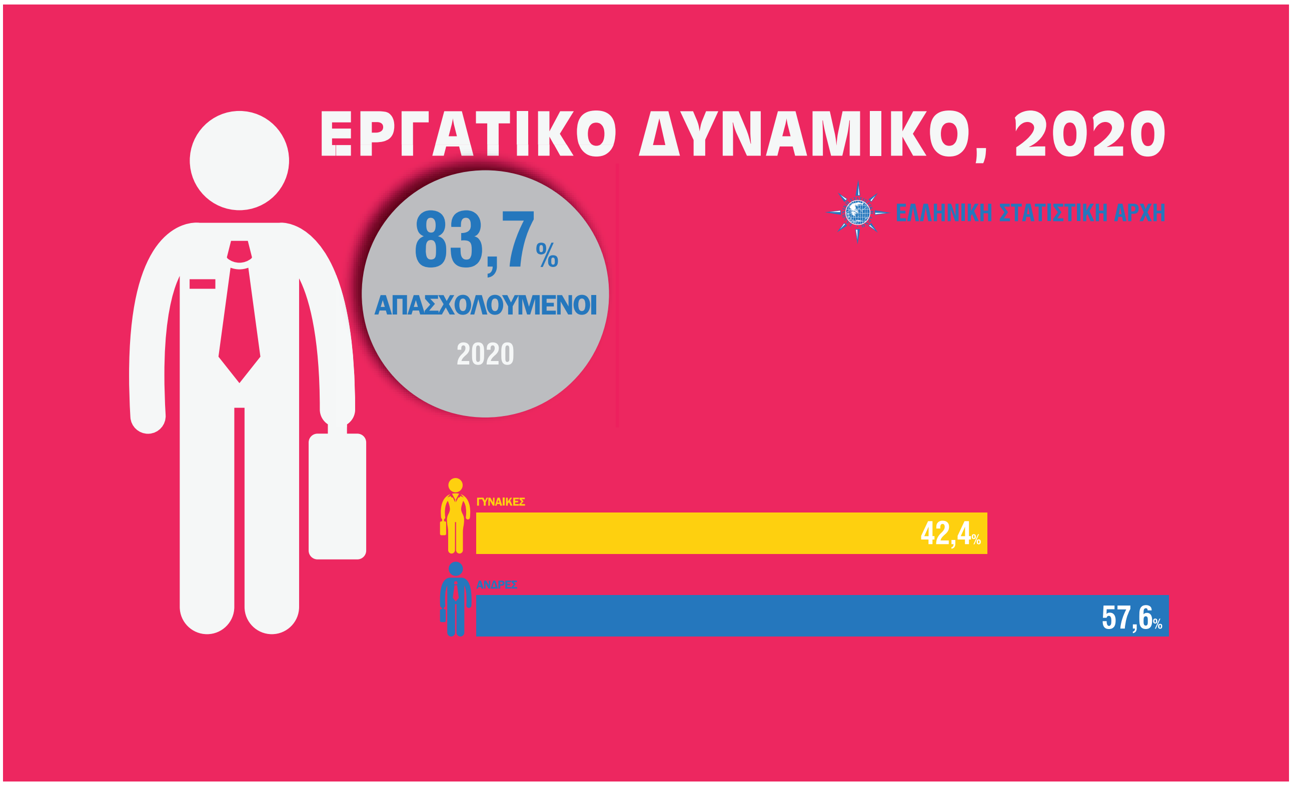

Όταν τοποθετούμε τα 5 νοικοκυριά στη σειρά, αλλά οι 2 από τις 5 θέσεις είναι «κλειδωμένες», δηλαδή τοποθετούμε σε αυτές συγκεκριμένα νοικοκυριά, τότε ουσιαστικά περιοριζόμαστε στην τοποθέτηση σε σειρά των υπόλοιπων 3 νοικοκυριών, οπότε οι διαφορετικοί τρόποι τοποθέτησης σε σειρά περιορίζονται σε μόλις 6.

| 1η θέση | 2η θέση | 3η θέση | 4η θέση | 5η θέση |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

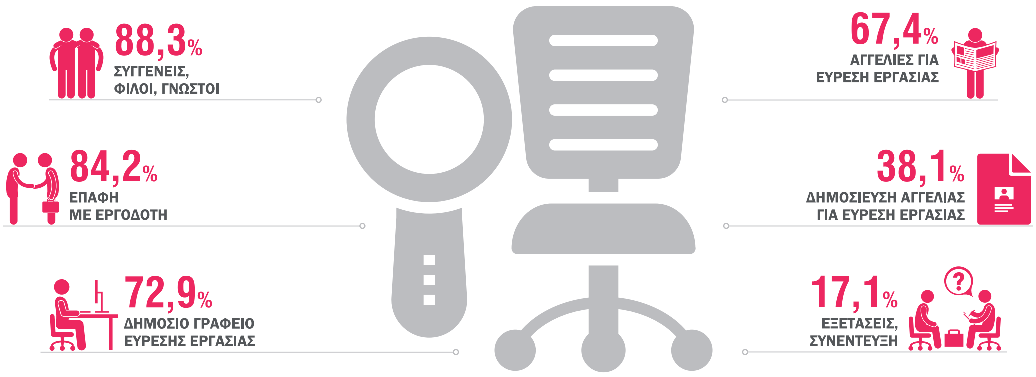
6 τρόποι

Επομένως, η πιθανότητα μια τυχαία επιλεγμένη τοποθέτηση σε σειρά να έχει τα νοικοκυριά Α και Β στις θέσεις 1 και 2, αντίστοιχα, είναι:

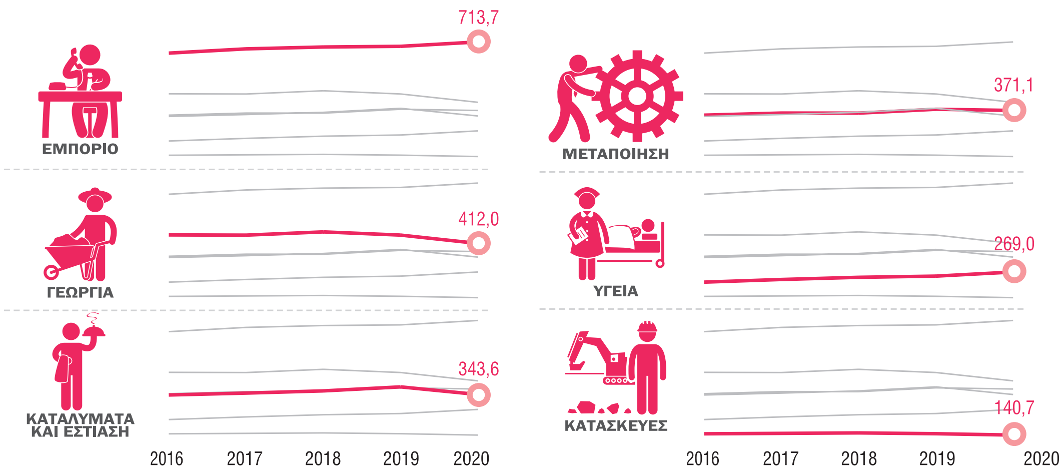





## Τρόποι αναζήτησης εργασίας ανέργων, 2020




## Απασχολούμενοι κατά οικονομική δραστηριότητα, 2020 (σε χιλιάδες)



# ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

***Πειράματα τύχης***

Είναι οι διαδικασίες (πειράματα ή φαινόμενα) των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες.

***Δειγματικός χώρος***

Είναι το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω.

***Ενδεχόμενο***

Είναι κάθε υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης. Λέμε ότι ένα ενδεχόμενο πραγματοποιείται, όταν το αποτέλεσμα μιας συγκεκριμένης εκτέλεσης του πειράματος τύχης είναι στοιχείο του ενδεχομένου.

***Πιθανότητα***

Είναι ένα μέτρο που εκφράζει πόσο πιθανό είναι να συμβεί ένα ενδεχόμενο. Η πιθανότητα παίρνει τιμές ανάμεσα στο 0 και το 1 ή, όταν εκφράζεται με ποσοστά επί τοις εκατό, ανάμεσα στο 0% και το 100%.

***Ισοπίθανα ενδεχόμενα***

Είναι τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης που έχουν την ίδια πιθανότητα να εμφανιστούν.

***Κλασικός ορισμός πιθανότητας***

Αν τα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ισοπίθανα, η πιθανότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου (π.χ. Α) δίνεται από τη σχέση:

$$P(A) = \frac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Ισχύουν: P(Ω)=1 (βέβαιο ενδεχόμενο) και P(Ø)=0 (αδύνατο ενδεχόμενο).

***Συμπληρωματικά ενδεχόμενα***

Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και Α΄ του δειγματικού χώρου Ω ισχύει: P(A) = 1 – P(A)

***Τομή ενδεχομένων***

Όταν συμβαίνουν ταυτόχρονα δύο ενδεχόμενα Α και Β, τότε λέμε ότι συμβαίνει η **τομή Α∩Β** των ενδεχομένων Α και Β. Η πιθανότητα να συμβούν ταυτόχρονα δύο ενδεχόμενα Α **και** Β συμβολίζεται **P(A∩B)** και διαβάζεται **πιθανότητα της τομής** των ενδεχομένων Α και Β.

***Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα***

Δύο ενδεχόμενα Α και Β ονομάζονται **ασυμβίβαστα**, όταν δεν μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα. Για δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα Α και Β ισχύει: P(A∩B) = 0

***'Ενωση ενδεχομένων***

Όταν συμβαίνει **τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα Α ή Β**, τότε λέμε ότι συμβαίνει η **ένωση Α∪Β** των ενδεχομένων Α και Β.
Για την ένωση **Α∪Β** των ενδεχομένων Α και Β ισχύει:
**P(A∪B) = P(A) + P(B) - P(A∩B)**

***Δεσμευμένη πιθανότητα***

Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω, τότε η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α, δεδομένου ότι έχει ήδη πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Β, λέγεται **δεσμευμένη πιθανότητα** του Α με δεδομένο το Β και συμβολίζεται με P(A|B) όπου P(B) > 0.

Για τη **δεσμευμένη πιθανότητα P(A|B)** ισχύει η σχέση:

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \textbf{όπου } P(B) > 0$$

***Ανεξάρτητα ενδεχόμενα***

Δύο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται ανεξάρτητα, αν **P(A∩B) = P(A) • P(B)**.

**_Αρχή του γινομένου_** *ή* **_«βασική αρχή της απαρίθμησης»_**

Αν υπάρχουν $\nu_1$ τρόποι για να κάνουμε την ενέργεια $\varepsilon_1$ , …, $\nu_\kappa$ τρόποι για να κάνουμε την ενέργεια $\varepsilon_\kappa$ , τότε υπάρχουν $\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot \ldots \nu_\kappa$ τρόποι για να κάνουμε τις ενέργειες $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 .. \varepsilon_\kappa$ ταυτόχρονα.

**_Αρχή του αθροίσματος_**

Αν υπάρχουν $\nu_1$ τρόποι για να κάνουμε την ενέργεια $\varepsilon_1$ , …, $\nu_\kappa$ τρόποι για να κάνουμε την ενέργεια $\varepsilon_\kappa$ , τότε υπάρχουν $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa$ τρόποι για να κάνουμε την ενέργεια $\varepsilon_1$ ή την ενέργεια $\varepsilon_2$ ή … ή την ενέργεια $\varepsilon_\kappa$ , με την προϋπόθεση ότι η πραγματοποίηση μιας ενέργειας αποκλείει όλες τις άλλες.

**_Διατάξεις χωρίς επαναλήψεις_**

Διατάξεις χωρίς επαναλήψεις **ν** διαφορετικών αντικειμένων ανά **κ** ονομάζεται καθένας από τους διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους μπορώ να επιλέξω **κ** από τα **ν** αντικείμενα και να τα τοποθετήσω στη σειρά.

Το πλήθος των διατάξεων χωρίς επαναλήψεις των **ν** ανά **κ** συμβολίζεται με $\Delta_\kappa^\nu$ και δίνεται από τη σχέση:

$\Delta_\kappa^\nu = \nu(\nu-1)\ldots(\nu-\kappa+1) = \frac{\nu!}{(\nu-\kappa)!}$ όπου **κ** μικρότερο ή ίσο με **ν**

**_Διατάξεις με επαναλήψεις_**

Διατάξεις με επαναλήψεις **ν** διαφορετικών αντικειμένων ανά **κ** ονομάζεται κάθε τοποθέτηση σε σειρά **κ** από τα **ν** αντικείμενα, όταν κάθε αντικείμενο μπορεί να επαναλαμβάνεται μέχρι **κ** φορές.

Το πλήθος των διατάξεων με επαναλήψεις των **ν** ανά **κ** συμβολίζεται με $E_\kappa^\nu$ και δίνεται από τη σχέση:

$E_\kappa^\nu = \underbrace{\nu \cdot \nu \cdot \ldots \cdot \nu}_{\kappa \text{ παράγοντες}} = \nu^\kappa$ (Δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός για το **κ** ως προς το **ν**)

**_Μετάθεση_**

Μετάθεση **ν** διαφορετικών αντικειμένων ονομάζεται η διάταξη (χωρίς επαναλήψεις) των **ν** αντικειμένων ανά **ν**.

Το πλήθος των μεταθέσεων **ν** αντικειμένων συμβολίζεται με $\mathbf{M}_\nu$ και δίνεται από τη σχέση: $\mathbf{M}_\nu = \nu!$

**_Επαναληπτική μετάθεση_**

Επαναληπτική μετάθεση **ν** αντικειμένων ονομάζεται η μετάθεση **ν** αντικειμένων που δεν είναι όλα διαφορετικά μεταξύ τους.

Το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων **ν** αντικειμένων, από τα οποία
τα $\kappa_1$ είναι ίδια μεταξύ τους και διαφορετικά από τα υπόλοιπα,
τα $\kappa_2$ είναι ίδια μεταξύ τους και διαφορετικά από τα υπόλοιπα,
…
…
τα $\kappa_\mu$ είναι ίδια μεταξύ τους και διαφορετικά από τα υπόλοιπα,

συμβολίζεται με $M_\nu^\varepsilon$ και δίνεται από τη σχέση:

$M_\nu^\varepsilon = \frac{\nu!}{\kappa_1!\kappa_2!\ldots\kappa_\mu!}$ όπου $\nu = \kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_\mu$

Ο εκθέτης **ε** του $M_\nu^\varepsilon$ συμβολίζει την **ε**παναληπτική μετάθεση.

**_Συνδυασμοί_**

Συνδυασμοί **ν** διαφορετικών αντικειμένων ανά **κ** λέγεται κάθε ομάδα των **κ** από τα **ν** αντικείμενα, όταν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά τοποθέτησής τους.

Το **πλήθος των συνδυασμών ν** διαφορετικών αντικειμένων **ανά κ** συμβολίζεται

$\binom{\nu}{\kappa}$ και δίνεται από τον τύπο: $\binom{\nu}{\kappa} = \frac{\nu!}{\kappa!(\nu-\kappa)!}$

# ΛΥΣΕΙΣ

**Κεφάλαιο 1**

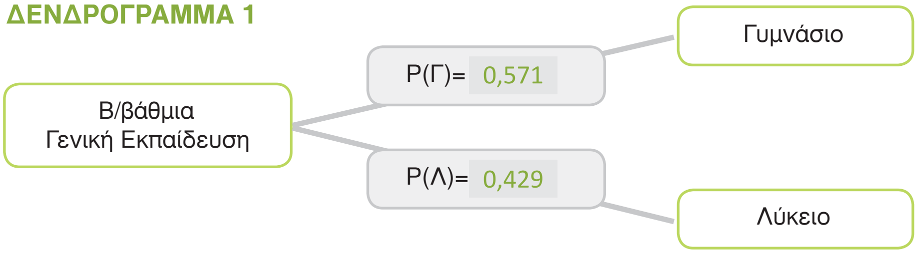
**1.2.α**

**(i)** $P(\Lambda) = \dfrac{\text{πλήθος των μαθητών/ τριών Λυκείου}}{\text{πλήθος όλων των μαθητών/ τριών της Β/ βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης}} = \dfrac{238.968}{556.590} \approx 0{,}429 = 42{,}9\%$

**(ii)** $P(\Gamma) = \dfrac{\text{πλήθος των μαθητών/ τριών Γυμνασίου}}{\text{πλήθος ολων των μαθητών/ τριών τηςΒ/ βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης}} = \dfrac{317.622}{556.590} \approx 0{,}571 = 57{,}1\%$

**(iii)** Γυμνάσιο **(iv)** Λύκειο **(v)** $P(\Gamma) = 1 - P(\Lambda) = 1 - 0{,}429 = 0{,}571$

## ΔΕΝΔΡΟΓΡΑΜΜΑ 1




**1.3.α**

**(i)** $P(\mathbf{A} \cap \mathbf{\Lambda}) = \dfrac{\text{πλήθος των αγοριών Λυκείου}}{\text{πλήθος όλων των μαθητών/ τριών της Β/ βάθμιας Γενικής Εκπαίδευσης}} = \dfrac{113.886}{556.590} \approx 0{,}205 = 20{,}5\%$

**1.5.α**

**(i)** $P(A \cup \Lambda) = P(A) + P(\Lambda) - P(A \cap \Lambda) = 0{,}501 + 0{,}429 - 0{,}205 = 0{,}725$

**1.6.α**

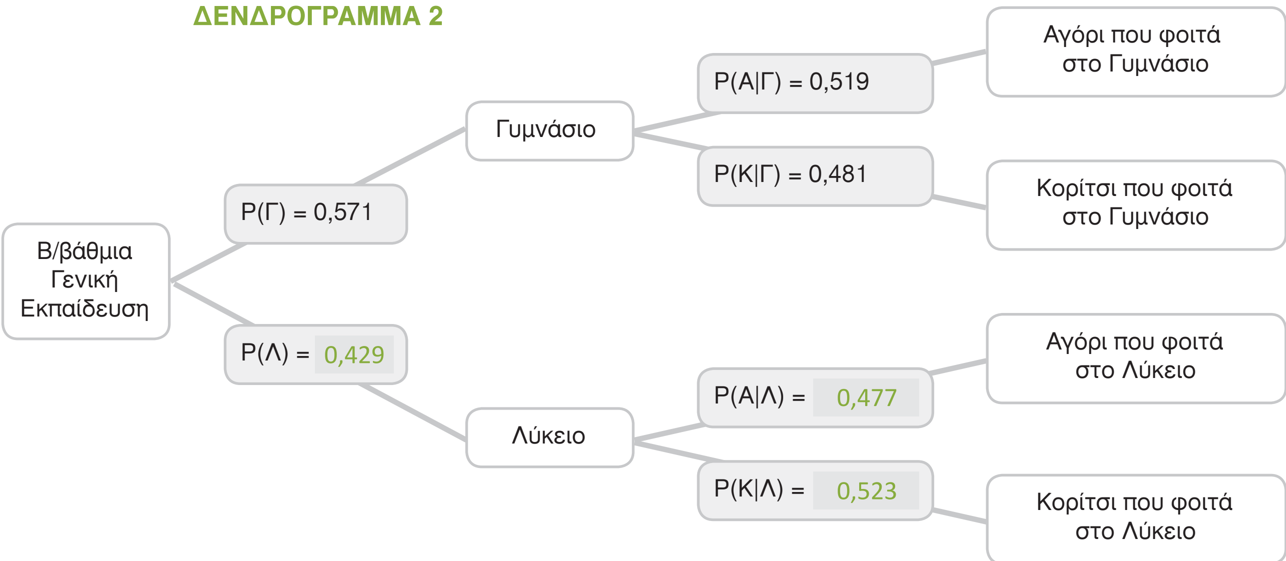
**(i)** Πράγματι $P(A) \neq P(A|\Gamma)$

**1.6.β**

**(i)** $P(K|\Gamma) = \dfrac{\text{πλήθος κοριτσιών \textbf{που φοιτούν} στο Γυμνάσιο}}{\text{πλήθος μαθητών/τριών που φοιτούν στο Γυμνάσιο}} = \dfrac{152.738}{317.622} \approx 0{,}481 = 48{,}1\%$

**(ii)** $P(K|\Gamma) = \dfrac{\text{P (κορίτσι \textbf{και} να φοιτά στο Γυμνάσιο)}}{\text{P(μαθητής/ τρια να φοιτά στο Γυμνάσιο)}} = \dfrac{\frac{152.738}{556.590}}{\frac{317.622}{556.590}} = \dfrac{152.738}{317.622} \approx 0{,}481 = 48{,}1\%$

## ΔΕΝΔΡΟΓΡΑΜΜΑ 2



**1.6.γ**

**(i)** $P(A|\Lambda) = \dfrac{\text{πλήθος αγοριών που φοιτούν στο Λύκειο}}{\text{πλήθος μαθητών/τριών που φοιτούν στο Λύκειο}} = \dfrac{113.886}{238.968} \approx 0{,}477 = 47{,}7\ \%$

**1.6.δ**

**(i)** $P(K|\Lambda) = \dfrac{P(K \cap \Lambda)}{P(\Lambda)} = \dfrac{\frac{125.082}{556.590}}{\frac{238.968}{556.590}} = \dfrac{125.082}{238.968} \approx 0{,}523 = 52{,}3\ \%$

**1.6.ε**

**3.**

**(i)** P(Λ) = 0,429

**(ii)** P(Α|Λ) = 0,477

**(iii)** **P(Α∩Λ) = P(Λ) • P(Α|Λ)** = 0,429 • 0,477 ≈ 0,205 = 20,5%

**(iv)** **P(Α∩Λ)** = 20,5 % ... Αγόρι ... Λυκείου

**4.**

**(i)** P(Λ) = 0,429

**(ii)** P(Κ|Λ) = 0,523

**(iii)** **P(Κ∩Λ) = P(Λ) • P(Κ|Λ)** = 0,429 • 0,523 ≈ 0,224 = 22,4%

**(iv)** **P(Κ∩Λ)** = 22,4 % ... Κορίτσι ... Λυκείου

## ΔΕΝΔΡΟΓΡΑΜΜΑ 4

P(Κ∩Γ) = 27,5 %

P(Α∩Λ) = 20,5 %

P(Κ∩Λ) = 22,4 %

**1.6.στ**

**(i)** P(Α∩Γ) + P(Κ∩Γ) + P(Α∩Λ) + P(Κ∩Λ) = 29,6% + 27,5% + 20,5% + 22,4% = 100% = P(Ω)

**(ii)** P(Α∩Γ) + P(Κ∩Γ) = 29,6% + 27,5% = 57,1% = P(Γ)

**(iii)** P(Α∩Λ) + P(Κ∩Λ) = 20,5% + 22,4% = 42,9% = P(Λ)

**(iv)** P(Α∩Γ) + P(Α∩Λ) = 29,6% + 20,5% = 50,1% = P(Α)

**(v)** P(Κ∩Γ) + P(Κ∩Λ) = 27,5% + 22,4% = 49,9% = P(Κ)

**(vi)**

| | | | ΑΘΡΟΙΣΜΑ |
|---|---|---|---|
| | **P(Α∩Γ)** = 29,6% | **P(Α∩Λ)** = 20,5% | P(Α) = 50,1% |
| | **P(Κ∩Γ)** = 27,5% | **P(Κ∩Λ)** = 22,4% | P( Κ ) = 49,9% |
| ΑΘΡΟΙΣΜΑ | P( Γ ) = 57,1% | P( Λ ) = 42,9% | P(Ω) = 100,0% |

**2.1.α**

**(i)** $2 \cdot 3 = 6$

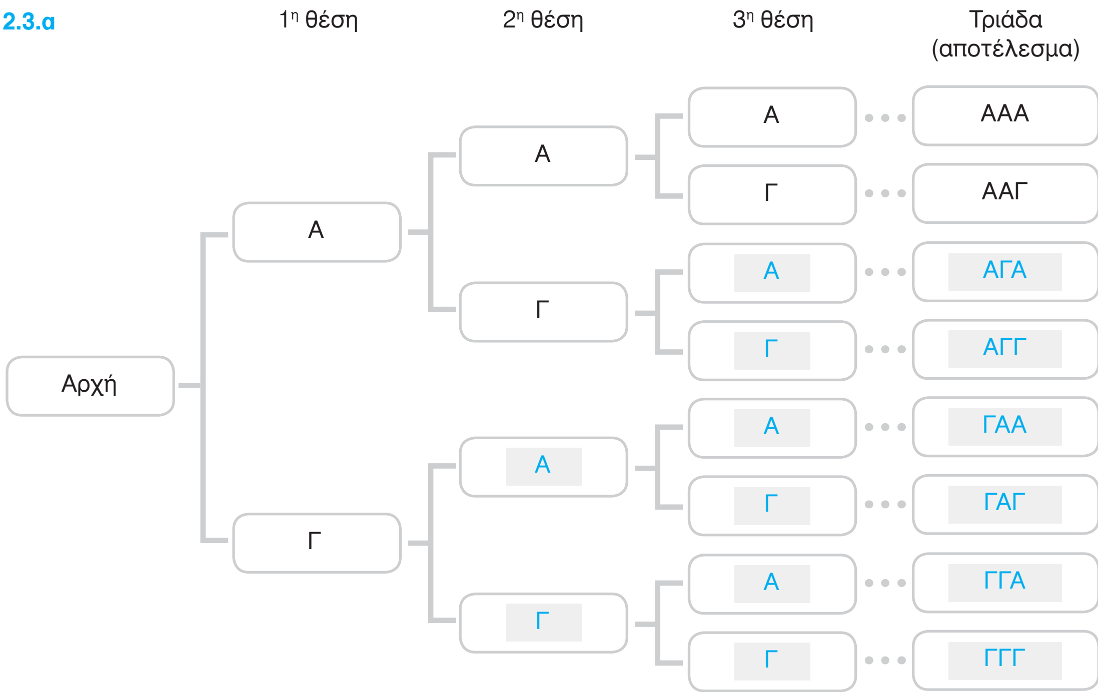
**2.2.α**

## ΠΙΝΑΚΑΣ 1

| | 1η θέση | 2η θέση | 3η θέση |
|---|---|---|---|
| Επιλογές/τρόποι | 24 | 23 | 22 |

**(i)** $24 \cdot 23 \cdot 22 = 12.144$

**2.3.α**




**2.3.β**

## ΠΙΝΑΚΑΣ 2

| | $1^{η}$ θέση | $2^{η}$ θέση | $3^{η}$ θέση |
|---|---|---|---|
| Επιλογές/τρόποι | 2 | 2 | 2 |

**(i)** γινομένου
**(ii)** $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$

**2.4.α**

## ΠΙΝΑΚΑΣ 3

| | $1^{ο}$ ψηφίο | $2^{ο}$ ψηφίο | $3^{ο}$ ψηφίο |
|---|---|---|---|
| Επιλογές/τρόποι | 9 | 8 | 7 |

**(i)** χωρίς **(ii)** 3 **(iii)** $\Delta_3^9 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

## ΠΙΝΑΚΑΣ 4

| | $1^{ο}$ ψηφίο | $2^{ο}$ ψηφίο | $3^{ο}$ ψηφίο |
|---|---|---|---|
| Επιλογές/τρόποι | 9 | 9 | 9 |

**(iv)** με **(v)** 9 **(vi)** $E_3^9 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3 = 729$

## Κεφάλαιο 3

**3.1.α**

**(i)** $M_{10} = 10! = 3.628.800$

**3.2.α**

**(i)** $M^{\varepsilon}_{10} = \dfrac{10!}{4!\ 1!\ 2!\ 3!} = 12.600$

**3.3.α**

**(i)** επαναληπτική **(ii)** δύο (2) **(iii)** $M^{\varepsilon}_{9} = \dfrac{9!}{2!\ 2!\ 1!\ 1!\ 1!\ 1!\ 1!} = 90.720$

**(iv)** επαναληπτική **(v)** δύο (2) **(vi)** μία (1) **(vii)** $M^{\varepsilon}_{5} = \dfrac{5!}{2!\ 1!\ 1!\ 1!} = 60$

**(viii)** γινομένου **(ix)** $60 \cdot 1 = 60$ **(x)** μετάθεση **(xi)** διαφορετικά **(xii)** $M_5 = 5! = 120$

**3.3.6 Η απόδειξη του θεωρήματος Bayes**

Βάσει του ορισμού της δεσμευμένης πιθανότητας ισχύει:

$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ **(1)**, $P(B) \neq 0$ $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ **(2)**, $P(A) \neq 0$

Επιλύοντας την **(2)** ως προς $P(A \cap B)$ έχουμε: $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$ **(3)**

Από τις σχέσεις **(1)** και **(3)** παίρνουμε: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$

## Κεφάλαιο 4

**4.1.α**

**(i)** 10

**4.2.α**

**(i)** $\binom{5}{4} = \dfrac{5!}{4!\ 1!} = 5$ **(ii)** $\binom{5}{5} = \dfrac{5!}{5!\ 0!} = 1$ **(iii)** $5 + 1 = 6$

**4.3.α**

**(i)** ένα (1) **(ii)** $\binom{7}{1} = \dfrac{7!}{1!\ 6!} = 7$ **(iii)** δύο (2) **(iv)** $\binom{7}{2} = \dfrac{7!}{2!\ 5!} = 21$

**(v)** τρεις (3) **(vi)** $\binom{7}{3} = \dfrac{7!}{3!\ 4!} = 35$ **(vii)** αθροίσματος **(viii)** $7 + 21 + 35 = 63$

## Κεφάλαιο 5

**5.1.α**

**(i)** $P(E) = \dfrac{3.875.479}{4.630.461} \approx 0{,}837 = 83{,}7\%$ **(ii)** $P(A) = 1 - P(E) = 1 - 0{,}837 = 0{,}163 = 16{,}3\%$

**(iii)** $P(A|Λ) = \dfrac{\text{πλήθος Ανέργων οι οποίοι έχουν έως και Απολυτήριο Λυκείου}}{\text{πλήθος ατόμων με το πολύ Απολυτήριο Λυκείου}} = \dfrac{451.558}{2.455.349} \approx 0{,}184 = 18{,}4\%$

**(iv)** $P(A|I) = \dfrac{\text{πλήθος Ανέργων οι οποίοι έχουν και Πτυχίο ΙΕΚ}}{\text{πλήθος ατόμων με Πτυχίο ΙΕΚ}} = \dfrac{103.800}{521.511} \approx 0{,}199 = 19{,}9\%$

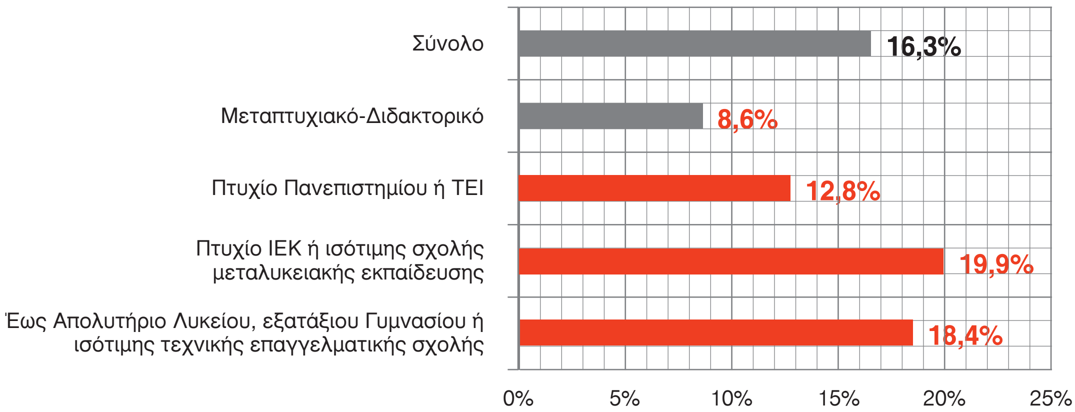
**(v)** $P(A|Π) = \dfrac{\text{πλήθος Ανέργων οι οποίοι έχουν και Πτυχίο Πανεπιστημίου}}{\text{πλήθος ατόμων με Πτυχίο Πανεπιστημίου}} = \dfrac{174.246}{1.357.455} \approx 0{,}128 = 12{,}8\%$

**(vi)** $P(A|M) = \dfrac{\text{πλήθος Ανέργων οι οποίοι έχουν και Μεταπτυχιακό - Διδακτορικό}}{\text{πλήθος ατόμων με Μεταπτυχιακό - Διδακτορικό}} = \dfrac{25.378}{296.166} \approx 0{,}086 = 8{,}6\%$

## 5.1.β

## ΠΙΝΑΚΑΣ 3

| ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ (%) ΑΝΕΡΓΙΑΣ ΑΝΑ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ, 2020 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Επίπεδο Εκπαίδευσης | | | | |
| | έως Απολυτήριο Λυκείου, εξατάξιου Γυμνασίου ή ισότιμης τεχνικής επαγγελματικής σχολής | Πτυχίο ΙΕΚ ή ισότιμης σχολής μεταλυκειακής εκπαίδευσης | Πτυχίο Πανεπιστημίου ή ΤΕΙ | Μεταπτυχιακό-Διδακτορικό | ΣΥΝΟΛΟ |
| % Ανέργων | 18,4 % | 19,9 % | 12,8 % | 8,6 % | 16,3% |




## 5.2.α

**(i)** $\binom{10}{5} = \dfrac{10!}{5!\ 5!} = 252$

**(ii)** πέντε (5) **(iii)** τριάδας **(iv)** 5 ανά 3 **(v)** $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!\ 2!} = 10$

**(vi)** δύο (2) **(vii)** έναν (1) **(viii)** γινομένου **(ix)** $252 \cdot 10 \cdot 1 = 2520$

## 5.2.β

**(i)** Β **(ii)** Γ

## 5.2.γ

**(i)** Α **(ii)** Α **(iii)** Γ **(iv)** Β **(v)** Γ **(vi)** Α

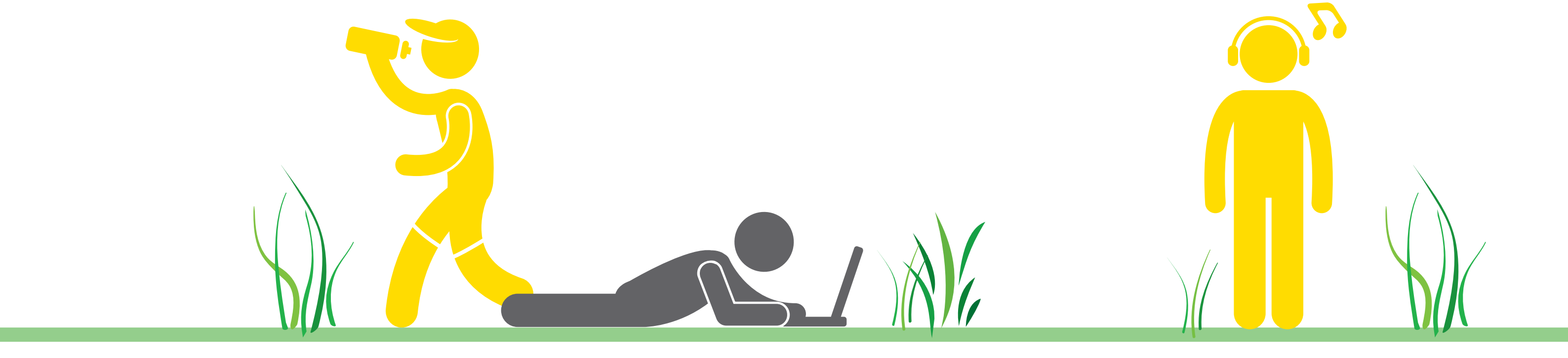
## 5.2.δ

**(i)** Β

Σημείωση: Αποκλίσεις στον υπολογισμό των πιθανοτήτων οφείλονται στη διαδικασία στρογγυλοποίησης (των επιμέρους τιμών των πιθανοτήτων).

**Επισκεφθείτε την ιστοσελίδα της ΕΛΣΤΑΤ για να βρείτε και τις άλλες εκδόσεις «Οι αριθμοί και η ζωή μας».**


https://www.statistics.gr/el/edu-games



www.statistics.gr