2^{ος} Πανελλήνιος Διαγωνισμός στη Στατιστική (2019)

Θέματα 1^{ου} τεστ (ασκήσεις και λύσεις)

Κατηγορία: Γενικά και Επαγγελματικά Λύκεια

Εκδοχή 1

ΑΣΚΗΣΗ 1.

Η πιθανότητα ένας ακέραιος από το 1 έως το 1.000.000 να διαιρείται με το 30 αλλά να μην διαιρείται με το 16 είναι:

Α. 2,8712%

Β. 0,4167%

Γ. 2,9167%

Δ. 3,3333%

Λύση

Έχουμε n= 1.000.000 αριθμούς. Από αυτούς διαιρούνται με το 30, $\frac{1.000.000}{30}$ = 33.333 αριθμοί. Με το 30 και το 16 διαιρούνται οι αριθμοί που διαιρούνται με το Ε.Κ.Π αυτών, δηλαδή με το 240. Αυτοί είναι $\frac{1.000.000}{240}$ = 4.167 αριθμοί. Άρα, διαιρούνται με το 30, αλλά δεν διαιρούνται με το 16, 33.333-4.167=29.166 αριθμοί.

Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι P = $\frac{29166}{1.000.000}$ .100 = 2,9167%

ΑΣΚΗΣΗ 2.

Το παρακάτω ιστόγραμμα μας παρουσιάζει τη βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης (κλίμακα 0 – 100) σε ένα διαγνωστικό διαγώνισμα μαθηματικών.

Ο καθηγητής των μαθηματικών παρατηρεί ότι η βαθμολογία των μαθητών είναι ιδιαίτερα χαμηλή. Γι’ αυτό το λόγο πιστεύει ότι θα πρέπει να προχωρήσει σε μια αλλαγή των βαθμών της τάξης χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση f(x) = αχ + β με βάση τα παρακάτω κριτήρια:

I. Ο μέσος όρος της βαθμολογίας θα πρέπει να αυξηθεί κατά 20%.

II. Η τυπική απόκλιση της βαθμολογίας να μειωθεί κατά 20%.

III. Οι νέοι βαθμοί που θα προκύψουν να είναι ομοιογενείς.

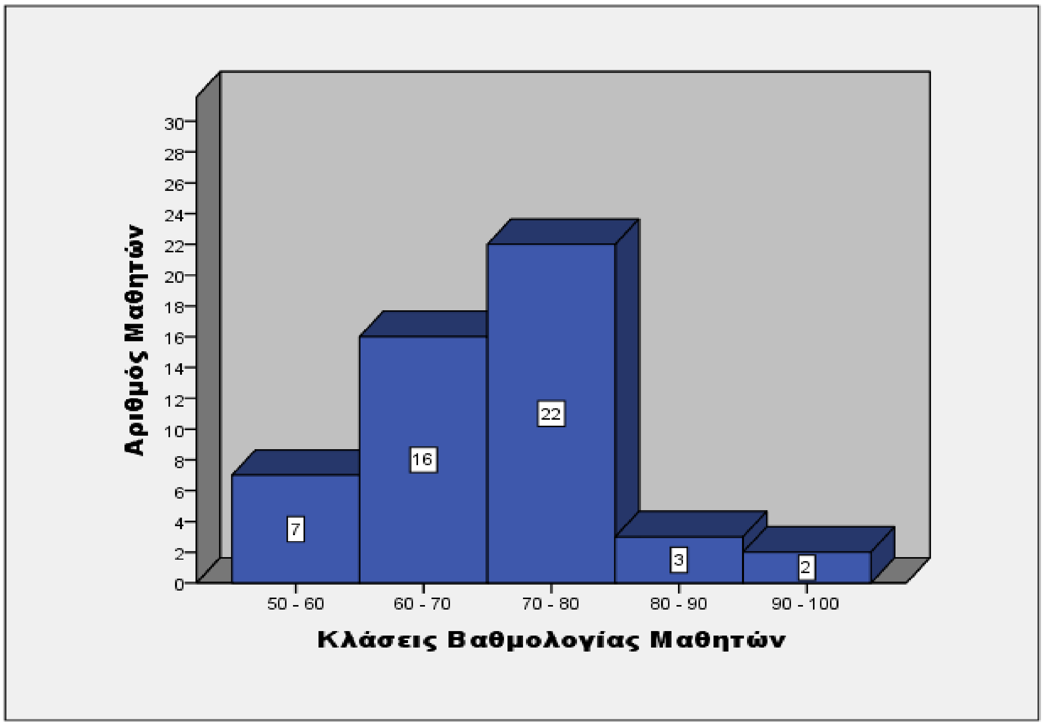
Εάν η βαθμολογία ενός μαθητή της τάξης ήταν 65, η νέα βαθμολογία του μετά την εφαρμογή της διαβάθμισης με βάση τα παραπάνω κριτήρια θα είναι:

Α. 85

Β. 78

Γ. 82

Δ. 80



Λύση:

Σύμφωνα με τα δεδομένα του ιστογράμματος έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	ν_i	f_i	x_i	$f_i * x_i$	$f_i * x_i^2$
50-60	7	0,14	55	7,7	423,5
60-70	16	0,32	65	20,8	1.352
70-80	22	0,44	75	33	2.475
80-90	3	0,06	85	5,1	433,5
90-100	2	0,04	95	3,8	361
Σύνολο	50	1		70,4	5.045

Άρα: $\bar{x}_A = \sum_{i=1}^{5} f_i x_i = 70{,}4$ και $\sigma_A^2 = \sum_{i=1}^{5} f_i {x_i}^2 - (\bar{x})^2 = 5.045 - 4.956{,}16 = 88{,}84$

Άρα, η τυπική απόκλιση $\sigma_A = \sqrt{\sigma_A^2} = \sqrt{88{,}84} = 9{,}425$

Σύμφωνα με τις απαιτήσεις του π προβλήματος, η νέα μέση τιμή των βαθμών θα είναι αυξημένη κατά 20% σε σχέση με την παλιά, θα είναι δηλαδή:

$$\bar{x}_T = \bar{x}_A + \frac{20}{100}\bar{x}_A = 1.20 * 70{,}4 = 84{,}48$$

Ενώ, η τυπική απόκλιση θα είναι μειωμένη κατά 20% και θα είναι:

$$\sigma_T = \sigma_A + \frac{20}{100}\sigma_A = 0{,}8\sigma_A = 0{,}8(9{,}425) = 7{,}54,$$

Γνωρίζουμε όμως ότι, εάν οι παρατηρήσεις:

$x_{i\,,}$ i=1,2,…n έχουν μέση τιμή $\overline{x}$ και τυπική απόκλιση σ, τότε οι παρατηρήσεις $y_{i=}\alpha x_i + \beta$, θα έχουν μέση τιμή $\overline{y} = a\overline{x} + \beta$ και τυπική απόκλιση $\sigma_{y=} |\alpha| * \sigma$

Άρα:

$\overline{x}_T = \alpha\overline{x}_A + \beta$

$\sigma_{T=} |\alpha|\, \sigma_{A\,,} \alpha > 0$

$\Longrightarrow$

84,48 =70,4α + β

7,54 = α(9,425)

$\Longrightarrow$

84,48 =70,4α + β

α = 0,8

$\Longrightarrow$

84,48 =70,4(0,8) + β

α = 0,8

$\Longrightarrow$

84,48 =56,32 + β

α = 0,8

$\Longrightarrow$

β=28,16

α = 0,8

Άρα, ο μετασχηματισμός γίνεται μέσω του τύπου: τελικός βαθμός = 0,8 (αρχικός βαθμός) + 28,16

Ο μαθητής ο οποίος είχε αρχικό βαθμό 65 θα έχει: Τελικό βαθμό = 0,8 (65) + 28,16 = 80,16

Άρα ο καθηγητής θα του δώσει ως νέο βαθμό 80.

Επίσης, $CV_T = \frac{\sigma_T}{\overline{x}_T} = \frac{7.54}{84.48} = 0{,}089 < 0.1$

Άρα οι νέοι βαθμοί είναι και ομοιογενείς.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 3.</u>

Πόσες φορές θα πρέπει να ρίξουμε ένα κανονικό ζάρι για να είμαστε 99% σίγουροι ότι θα φέρουμε τουλάχιστον μια φορά την ένδειξη 1;

Α. 35
Β. 18
Γ. 43
Δ. 26

<u>Λύση</u>

Έστω το ενδεχόμενο Α: η ένδειξη του ζαριού είναι 1 , τότε P(A) = 1/6 και P(A΄) = 5/6

P (τουλάχιστον μια φορά ένδειξη 1) = 1 - P ($\underbrace{A'A' \ldots \ldots A'}_{\text{n φορές}}$) = 1 - $(\frac{5}{6})^n$

Επομένως, 1 - $(\frac{5}{6})^n$ = 0,99 => $(\frac{5}{6})^n$ = 0,01 => n ln($\frac{5}{6}$) = ln(0,01) => n = 26

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4.</u>

Δημιουργούμε όλα τα πιθανά ζεύγη ακεραίων από το σύνολο Α={1,2,3,....100} χωρίς επανατοποθέτηση. Η πιθανότητα να επιλέξουμε ζεύγος όπου ο ένας ακέραιος μην είναι το τετράγωνο του άλλου είναι:

Α. 94,89%
Β. 95,11%
Γ. 99,82%
Δ. Κανένα από τα παραπάνω

<u>Λύση</u>

Τα πιθανά ζεύγη των ακεραίων χωρίς επανατοποθέτηση είναι :

$$\binom{100}{2} = \frac{100!}{2!\ 98!} = 4950 \text{ ζεύγη}$$

Τα ζεύγη που ο ένας ακέραιος είναι το τετράγωνο του άλλου είναι (2,4), (3,9), (4,16), (5,25), (6,36), (7,49), (8,64), (9,81), (10,100).

Επειδή τα παίρνουμε χωρίς επανατοποθέτηση θα είναι στο σύνολο 9.

Άρα, η πιθανότητα p ο ένας αριθμός να είναι το τετράγωνο του άλλου θα είναι $^{9}/_{4950} = 0{,}0018$

Επομένως, p΄= 1-p = 1-0,0018 = 0,9982, δηλ. 99,82%.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 5</u>

Μια μικρή επιχείρηση απασχολεί πέντε εργαζόμενους που αμείβονται σύμφωνα με το παρακάτω πλάνο:

α 1,5α 1,8α 0,6α 0,9α

με την τιμή του συντελεστή α να εξαρτάται από τα μηνιαία έσοδα της επιχείρησης, αλλά σε κάθε περίπτωση να είναι τουλάχιστον 800 Ευρώ.

Ο διευθυντής της επιχείρησης διαπιστώνοντας ότι οι μηνιαίοι μισθοί των υπαλλήλων του είναι ανομοιογενείς και, δεδομένης και της σημαντικής αύξησης των μηνιαίων εσόδων της επιχείρησης, θέτει ως στόχο την διόρθωση αυτής της αδικίας αυξάνοντας τους μισθούς όλων των εργαζομένων κατά το ίδιο ποσό. Με βάση αυτό το κριτήριο, ο μισθός του πρώτου υπαλλήλου της λίστας στο τέλος του μήνα θα είναι τουλάχιστον:

Α. 2,87α
Β. 3,06α
Γ. 4,16α
Δ. 1,97α

Λύση

Ο μέσος μισθός των υπαλλήλων της επιχείρησης με βάση τα δεδομένα θα είναι:

$\overline{\chi_A} = \frac{\sum_{i=1}^{5} \chi_i}{5} = \frac{5.8}{5}\alpha = 1{,}16\alpha$

Η διακύμανση των μισθών των υπαλλήλων θα είναι : $\sigma_A{}^2 = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} \chi_i^2 - (\bar{x}_A)^2 =$

$= \frac{1}{5}\ \{\alpha^2 + (1{,}5\alpha)^2 + (1{,}8\alpha)^2 + (0{,}6\alpha)^2 + (0{,}9\alpha)^2\} - (1{,}16\alpha)^2 = 0{,}1864\alpha^2.$

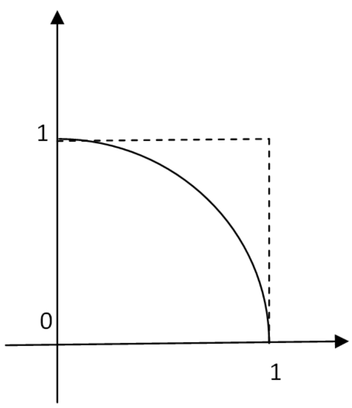
Άρα, η τυπική απόκλιση θα είναι: $\sigma_A = \sqrt{\sigma_A{}^2} = \sqrt{0{,}1864\ \alpha^2} = 0{,}432\alpha$. Ο συντελεστής μεταβλητότητας των αρχικών μισθών ήταν: $CV_A = \frac{\sigma_A}{\overline{\chi_A}} = \frac{0.432\alpha}{1.16\alpha} = 0.3724 > 0.10$,άρα οι μισθοί είναι ανομοιογενείς.

Έστω c: το ποσό της αύξησης όλων των μισθών. Τότε η νέα τυπική απόκλιση των μισθών θα είναι : $S_T = S_A = 0{,}432\alpha$, ενώ η νέα μέση τιμή των μισθών μετά την αύξηση θα είναι: $\overline{X_T} = \overline{X_A} + c = 1{,}16\alpha + c$.

Ζητούμενο είναι οι νέοι μισθοί να είναι ομοιογενείς, άρα:

$CV_T \leq 0{,}10 => \frac{0{,}432\alpha}{1{,}16\alpha + c} \leq 0{,}10 => c \geq 3{,}16\alpha$. Άρα, ο νέος μισθός του πρώτου υπαλλήλου μετά την αύξηση θα είναι: $\alpha + 3{,}16\alpha = 4{,}16^{\alpha}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6



Ένας υπολογιστικός αλγόριθμος προσομοίωσης δημιουργεί τυχαία σημεία των οποίων οι συντεταγμένες ανήκουν στο παραπάνω τετράγωνο. Εάν έχει δημιουργήσει 1.350 τέτοια σημεία, μέσα στο τεταρτοκύκλιο θα βρίσκονται περίπου:

Α. 1.025 σημεία
Β. 1.458 σημεία
Γ. 1.060 σημεία
Δ. δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα

Λύση
Η πιθανότητα p ένα σημείο να ανήκει στο τεταρτοκύκλιο είναι:

$$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{E}(\text{τεταρτοκύκλιου})}{\mathrm{E}(\text{τετραγώνου})} = \frac{\frac{\pi(1)^2}{4}}{1} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785$$

Άρα, στο τεταρτοκύκλιο θα ανήκει το 78,5% των 1350 σημείων, δηλαδή 1.060 σημεία.

ΑΣΚΗΣΗ 7
Ένας αριθμός του δυαδικού συστήματος αρίθμησης αποτελείται από λ το πλήθος μηδενικά και κ το πλήθος άσσους. Ο συντελεστής μεταβλητότητας όλων των ψηφίων του αριθμού είναι:

Α. √(κ(κ+λ)/λ)*100%
Β. √(κλ/(κ+λ))*100%
Γ. √(κ/λ)*100%
Δ. √(λ/κ)*100%

Λύση
Η μέση τιμή των ψηφίων του δυαδικού θα είναι: $\overline{\chi}=\frac{\lambda(0)+\kappa(1)}{\kappa+\lambda}=\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}$, ενώ η διακύμανση των ψηφίων του θα είναι:

$$\sigma^2=\frac{1}{\kappa+\lambda}\left\{\underbrace{0^2+0^2+0^2+\cdots+0^2}_{\lambda\ \text{φορές}}+\underbrace{1^2+1^2+1^2+\cdots+1^2}_{\kappa\ \text{φορές}}\right\}-\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)^2=\frac{1}{\kappa+\lambda}\{\kappa\}-\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)^2=$$

$$\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}-\left(\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}\right)^2=\frac{\kappa\lambda}{(\kappa+\lambda)^2}$$

Άρα, η τυπική απόκλιση αυτών θα είναι : $\sigma=\sqrt{\frac{\kappa\lambda}{(\kappa+\lambda)^2}}=\frac{\sqrt{\kappa\lambda}}{\kappa+\lambda}$

Επομένως, ο συντελεστής μεταβλητότητας CV θα είναι:

$$\mathrm{CV}=\frac{\frac{\sqrt{\kappa\lambda}}{\kappa+\lambda}}{\frac{\kappa}{\kappa+\lambda}}=\frac{\sqrt{\kappa\lambda}}{\kappa}=\sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}}\,100\%$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 8</u>

Ο παραπάνω πίνακας μας παρουσιάζει τις ετήσιες % μεταβολές του συνολικού ετησίου κύκλου εργασιών πέντε επιχειρήσεων της Χώρας κατά την διετία 2016-2018.

Εάν ο συνολικός ετήσιος κύκλος εργασιών της Επιχείρησης Δ στο τέλος του έτους 2018 ήταν 510.000 Ευρώ, ο συνολικός ετήσιος κύκλος εργασιών της Επιχείρησης στο τέλος του 2016 ήταν:

<u>Επιχείρηση</u>	<u>Ετήσια % μεταβολή από 2016-2017</u>	<u>Ετήσια % μεταβολή από 2017-2018</u>
Α	15	-20
Β	-9	8
Γ	-12	5
Δ	4	-30
Ε	16	-8

Α. 686.189,19 ευρώ
Β. 700.549,45 ευρώ
Γ. 649.361,11 ευρώ
Δ. 705.648,33 ευρώ

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω Χ: ο συνολικός ετήσιος κύκλος εργασιών της επιχείρησης Δ στο τέλος του 2016.

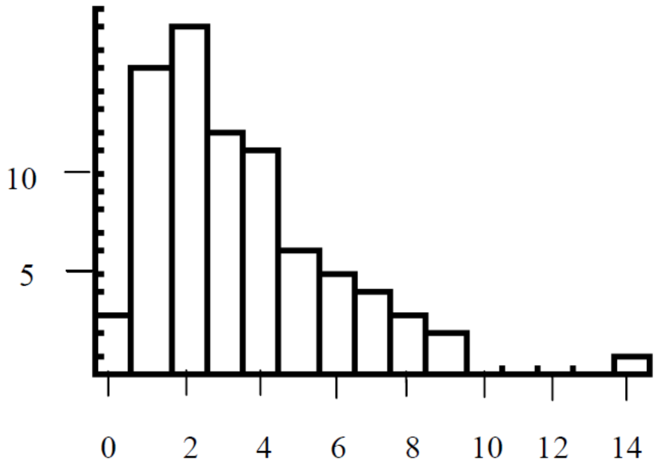
Τότε στο τέλος του 2017, ο κύκλος εργασιών της ήταν $\mathrm{x}+\frac{4}{100}\mathrm{x}=1{,}04\mathrm{x}$, ενώ στο τέλος του 2018 ήταν:

$$1{,}04\mathrm{x}-\frac{30}{100}(1{,}04\mathrm{x})=0{,}728\mathrm{x}$$

Άρα: $0{,}728\mathrm{x}=510.000 \Rightarrow \mathrm{x}=700.549{,}45€$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 9</u>

Σε ένα ορεινό χωριό της Ελλάδας κατά τη διάρκεια του χειμώνα τα σχολεία παραμένουν κλειστά πολλές μέρες λόγω πυκνής χιονόπτωσης. Το παρακάτω ιστόγραμμα μας παρουσιάζει διαγραμματικά τον αριθμό των ημερών που τα σχολεία στο συγκεκριμένο χωριό παρέμειναν κλειστά κατά τη διάρκεια των τελευταίων εβδομήντα εννέα ετών.



Το μέτρο θέσης που περιγράφει την παραπάνω κατανομή είναι:

Α. Η μέση τιμή γιατί χρησιμοποιεί τα δεδομένα και των εβδομήντα εννέα ετών
Β. Η διάμεσος
Γ. Η επικρατούσα τιμή
Δ. Η μέση τιμή σε συνδυασμό με την επικρατούσα τιμή

Λύση
Από το ιστόγραμμα παρατηρούμε ότι υπάρχει μια κλάση ακραίων παρατηρήσεων με κεντρική τιμή περίπου 14. Συνεπώς, το καλύτερο μέτρο θέσης είναι η διάμεσος.

ΑΣΚΗΣΗ 10.

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές μιας τυχαίας μεταβλητής X και οι αντίστοιχες συχνότητες τους, με τιμές $\gamma \geq 32$, $24 \leq \beta \leq 31$ και $19 \leq \alpha \leq 20$.

Τιμές x_i	α	21	23	β	γ
Συχνότητα	4	6	8	7	5

Εάν η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι 19,36 και η μέση τιμή 27,4, το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + s)$ είναι:

Α. 81,5%
Β. 83,3%
Γ. 80,5%
Δ. 81,9%

ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι s^2=19,38, επομένως s=4,4.
Επομένως, ($\overline{X}$-2s, $\overline{X}$+s) είναι το διάστημα [27,4 -(2)(4,4), 27,4+4,4] = (18,6, 31,8).

Με βάση τις τιμές των α,β,γ στο διάστημα αυτό ανήκουν N=25 παρατηρήσεις.

Άρα το ποσοστό των παρατηρήσεων στο παραπάνω διάστημα θα είναι 25/30 = 0,833 δηλ. 83,3%.

Εκδοχή 2

ΑΣΚΗΣΗ 1.

Ένας κτηνίατρος κατέγραψε το βάρος ενός ζώου που γεννήθηκε ένα ημερολογιακό έτος πριν, δημιουργώντας τον παρακάτω πίνακα.

Μήνες	0	2	4	7	8	11	12
Βάρος (kgr)	2	4.5	5.7	9.3	14.4	20.1	24.2

Ο κτηνίατρος αναμένει το βάρος του ζώου σε ηλικία δύο ετών να είναι:

Α. Περίπου 43,488 κιλά
Β. Περίπου 41,452 κιλά
Γ. Περίπου 52,512 κιλά
Δ. Κανένα από τα παραπάνω

ΛΥΣΗ
Ο κτηνίατρος έχει συλλέξει στοιχεία σχετικά με το βάρος του ζώου το πρώτο έτος της ζωής του. Σύμφωνα με τη θεωρία, εκτιμήσεις σχετικά με το βάρος του μπορεί να γίνουν μόνο εντός του διαστήματος των τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής (μήνες ζωής) ή πάρα πολύ κοντά στα άκρα αυτού. Η τιμή 24 μήνες αποτελεί απομακρυσμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής και συνεπώς αξιόπιστη πρόβλεψη δεν μπορεί να προκύψει.

ΑΣΚΗΣΗ 2.

Ο παρακάτω πίνακας μας παρουσιάζει το συνολικό ετήσιο κύκλο εργασιών τεσσάρων επιχειρήσεων της χώρας το έτος 2018.

Επιχείρηση	**Κύκλος εργασιών σε χιλιάδες Ευρώ**
Α	82
Β	67
Γ	73,5
Δ	56,5

Έστω μ η μέση τιμή και σ^2 η διακύμανση του κύκλου εργασιών των τεσσάρων παραπάνω επιχειρήσεων. Θεωρούμε όλα τα τυχαία δείγματα μεγέθους ν = 2 από τον παραπάνω πληθυσμό χωρίς επανατοποθέτηση.

Έστω $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$,……. οι μέσες τιμές του 1ου , 2ου , 3ου ,……. δείγματος αντίστοιχα. Εάν $\overline{x}$ η μέση τιμή και s^2 η διακύμανση των $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$,……. τότε ισχύει ότι:

Α. $\mu = \overline{x}$ και $\sigma^2 < s^2$
Β. $\mu > \overline{x}$ και $\sigma^2 > s^2$
Γ. $\mu < \overline{x}$ και $\sigma^2 = s^2$
Δ. $\mu = \overline{x}$ και $\sigma^2 > s^2$

ΛΥΣΗ

Έστω, x_i : ο κύκλος εργασιών της επιχείρησης σε χιλιάδες ευρώ. Έχουμε ότι:

Επιχείρηση	x_i	X_i^2
Α	82	6.724
Β	67	4.489
Γ	73,5	5.402,25
Δ	56,5	3.192,25
Σύνολο	**279**	**19.807,5**

Άρα: $\mu = \frac{\sum x_i}{4} = \frac{279}{4} = 69{,}75$ και $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - (\overline{x})^2 = \frac{1}{4}(19.807{,}5) - (69{,}75)^2$ = 86,8125

Τα πιθανά δείγματα μεγέθους n=2 χωρίς επανατοποθέτηση είναι τα ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ, ΓΔ.

Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα:

ΔΕΙΓΜΑ	x_1, x_2	$\overline{x}_i$	$\overline{x}_i^2$
ΑΒ	82, 67	74,5	5.550,25
ΑΓ	82, 73,5	77,75	6.045,0625
ΑΔ	82, 56,5	69,25	4.795,5625
ΒΓ	67, 73,5	70,25	4.935,0625
ΒΔ	67, 56,5	61,75	3.813,0625
ΓΔ	73,5, 56,5	65	4.225

ΣΥΝΟΛΟ		**418,5**	**29.363,998**

Συνεπώς, $\overline{\mathrm{x}} = \frac{1}{6}\sum \overline{\mathrm{x}_\mathrm{i}}$ = $\frac{1}{6}(418{,}5) = 69{,}75$

και $\mathrm{s}^2 = \frac{1}{6}\sum \overline{\mathrm{x}}_\mathrm{i}^{\,2} - (\overline{\mathrm{x}})^2 = \frac{1}{6}(29.363{,}998) - (69{,}75)^2 = 28{,}9371$

Παρατηρούμε ότι, $\mu = \overline{\mathrm{x}}$ και $\sigma^2 > \mathrm{s}^2$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 3.</u>

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + kx + \lambda = 0$, όπου οι αριθμοί k και λ ορίζονται αντίστοιχα με τη βοήθεια δύο διαδοχικών ρίψεων ενός αμερόληπτου ζαριού. Η πιθανότητα η εξίσωση να έχει ρητές ρίζες είναι:

Α. 22,33%
Β. 18,67%
Γ. 19,44%
Δ. 21.11%

<u>Λύση</u>

Η διακρίνουσα Δ του τριωνύμου είναι $\Delta = \kappa^2 - 4\lambda$.
Για να έχει το τριώνυμο ρητές ρίζες θα πρέπει η διακρίνουσα του Δ να είναι το τετράγωνο ενός ακεραίου αριθμού. Δημιουργούμε για τη τιμή της διακρίνουσας τον παρακάτω πίνακα:

k \ λ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	-3	-7	-11	-15	-19	-23
2	0	-4	-8	-12	-16	-20
3	5	1	-3	-7	-11	-15
4	12	8	4	0	-4	-8
5	21	17	13	9	5	1
6	32	28	24	20	16	12

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι οι αριθμοί που είναι τετράγωνο ακεραίου είναι οι 0,1,4,9,16 που είναι στο πλήθος 7.

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι $\frac{7}{36}$ = 0,1944, δηλαδή 19,44%.

ΑΣΚΗΣΗ 4.

Ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι ο Ω = {x: x θετικός ακέραιος με 0 < x < 1.000.000}. Έστω τα ενδεχόμενα A_κ = {x: 0 < x < 1/κ} , κ = 1,2,3,4……1.000.000. Η πιθανότητα του ενδεχομένου $Z = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \ldots\ldots \cap A_\kappa$ είναι:

Α. 1

Β. 0

Γ. 0.5

Δ. Κανένα από τα παραπάνω

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα θα έχουμε:

$A_1 = \{x\text{: θετικός ακέραιος με } 0 < x < 1\} = \emptyset$

$A_2 = \left\{x\text{: θετικός ακέραιος με } 0 < x < {}^{1}/_{2}\right\} = \emptyset$

και γενικά,

$A_K = \left\{x\text{: θετικός ακέραιος με } 0 < x < {}^{1}/_{k}\right\} = \emptyset$

Άρα $Z = A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_k = \emptyset \cap \emptyset \cap \emptyset \ldots \cap \emptyset = \emptyset$

Άρα: $P(z) = P(\emptyset) = 0.$

ΑΣΚΗΣΗ 5.

Το ίδιο διαγνωστικό διαγώνισμα μαθηματικών δόθηκε σε μια ομάδα αγοριών και σε μια ομάδα κοριτσιών τελειόφοιτων Γυμνασίου. Ο παρακάτω πίνακας μας παρουσιάζει συνοπτικά την βαθμολογία τους. Επιλέγουμε τυχαία ένα αγόρι από την ομάδα των αγοριών και ένα κορίτσι από την ομάδα των κοριτσιών και υπολογίζουμε την πιθανότητα να έχουν γράψει τουλάχιστον δεκαεπτά. Έστω, p_A και p_K οι δύο πιθανότητες αντίστοιχα. Η σχέση που συνδέει τις πιθανότητες p_A και p_K είναι η:

Κλάσεις Βαθμολογίας	**Αριθμός αγοριών**	**Αριθμός κοριτσιών**
7 – 9,4	5	3
9,4 – 11,8	4	5
11,8 – 14,2	7	8
14,2 – 16,6	7	8
16,6 - 19	7	6

Α. p_A - p_K = 2,78%
Β. p_A - p_K = 1,11%
Γ. p_K – p_A = 3,33%
Δ. p_K – p_A = 2,22%

<u>**ΛΥΣΗ**</u>
Για τον υπολογισμό ενός εκατοστημορίου $\mathrm{P_{ki}}$ σχηματίζουμε την δεξιόστροφη αθροιστική συχνότητα N_1, N_2, … N_k και κάνουμε χρήση του μαθηματικού τύπου:

$\mathrm{P_{ki}} = \alpha_i + \frac{C}{V_i}\left(\frac{kn}{100} - N_{i-1}\right)$, όπου:

α_i: το κατώτερο όριο της τάξης στην οποία εντοπίζεται το εκατοστημόριο

V_i: η συχνότητα της τάξης στην οποία βρίσκεται το εκατοστημόριο

N_{i-1}: η δεξιόστροφη αθροιστική συχνότητα της τάξης που προηγείται εκείνης στην οποία εντοπίζεται το εκατοστημόριο

C: το πλάτος της τάξης στην οποία εντοπίζεται το εκατοστημόριο

n: το πλήθος των στοιχείων του δείγματος

k: το ποσοστό των παρατηρήσεων

Στη συγκεκριμένη άσκηση γνωρίζουμε την τιμή του εκατοστημορίου που είναι το 17 και ζητάμε να βρούμε σε ποιο ποσοστό της κατανομής αντιστοιχεί αυτή η τιμή. Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα:

ΚΛΑΣΕΙΣ	**V_A**	**V_K**	**N_A**	**N_K**
7 - 9,4	5	3	5	3
9,4 - 11,8	4	5	9	8
11,8 – 14,2	7	8	16	16
14,2 – 16,6	7	8	23	24
16,6 - 19	7	6	30	30
Σύνολο	30	30		

Για τα αγόρια έχουμε:

$\mathrm{P_{\kappa\lambda}} = \alpha_i + \frac{C}{V_i}\left(\frac{kn}{100} - N_{i-1}\right) \Rightarrow 17 = 16{,}6 + \frac{2{,}4}{7}(0{,}3k - 23) \Rightarrow$

$K_A = 0{,}80556$, δηλαδή 80,556%

Άρα, το ποσοστό των αγοριών που έγραψε τουλάχιστον 17 ήταν 100 – 80,556 = 19,444%

Ομοίως για τα κορίτσια έχουμε:

$\mathrm{P_{\kappa\lambda}} = \alpha_i + \frac{C}{V_i}\left(\frac{kn}{100} - N_{i-1}\right) \Rightarrow 17 = 16{,}6 + \frac{2{,}4}{6}(0{,}3k - 24) \Rightarrow$

$K_K = 0{,}83333$, δηλαδή 83,333%

Άρα, το ποσοστό των κοριτσιών που έγραψε τουλάχιστον 17 ήταν 100 – 83,333 = 16,667%

Άρα, $\mathrm{P_A} - \mathrm{P_K} = 19{,}9444\% - 16{,}667\% = 2{,}777\%$

<u>Σημείωση:</u> Η άσκηση μπορεί να λυθεί και γραφικά κάνοντας χρήση του πολυγώνου των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 6.</u>

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω αποτελούμενος από ν ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα με 1<ν<25. Αν Α ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου με Ρ(Α) = $\frac{1}{\sqrt{\nu}}$, τότε το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου Α είναι:

Α. 2 ή 3 ή 4
Β. 1 ή 2 ή 3
Γ. 3 ή 4 ή 5
Δ. Δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα

<u>Λύση</u>

Έστω λ το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου. Τότε:

$$\frac{1}{\sqrt{\nu}} = \frac{\lambda}{\nu} \Rightarrow \nu = \lambda\sqrt{\nu} \Rightarrow \sqrt{\nu} = \lambda \Rightarrow \nu = \lambda^2$$

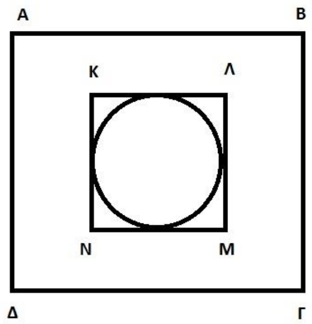
Αλλά, 1 < ν < 25. Επομένως, 1< λ^2< 25 και συνεπώς, λ = 2 ή λ = 3 ή λ = 4

<u>ΑΣΚΗΣΗ 7.</u>

Ένα νόμισμα διαμέτρου ενός εκατοστού ρίχνεται σε ένα τραπέζι καλυμμένο με ένα πλέγμα γραμμών που απέχουν δύο εκατοστά μεταξύ τους. Ποια είναι η πιθανότητα το νόμισμα να πέσει μέσα σε ένα τετράγωνο; (Υποθέτουμε ότι το νόμισμα ρίχνεται με τυχαίο τρόπο).

Α. 28%
Β. 35%
Γ. 40%
Δ. Κανένα από τα παραπάνω

Λύση



Έστω ένα πλέγμα γραμμών ΑΒΓΔ πλευράς 2 cm. Είναι φανερό ότι εάν το κέντρο του νομίσματος βρίσκεται μέσα στο τετράγωνο ΚΛΜΝ πλευράς 1 cm, τότε το νόμισμα δεν θα αγγίζει το εξωτερικό πλέγμα. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

P = Εμβαδόν (ΚΛΜΝ) / Εμβαδόν (ΑΒΓΔ) = $\frac{1}{4}$ = 0,25

ΑΣΚΗΣΗ 8.

Ο παρακάτω πίνακας μας παρουσιάζει τους συνολικούς ετήσιους κύκλους εργασιών της επιχείρησης Δ, από το έτος 2012 έως και το έτος 2015.

Έτος	**Ετήσιος Κύκλος Εργασιών σε χιλιάδες Ευρώ**
2012	1.044,23
2013	730,96
2014	745,58
2015	603,92

Η τυπική απόκλιση των ποσοστών μεταβολής του κύκλου εργασιών της επιχείρησης κατά τη διάρκεια των παραπάνω ετών είναι περίπου:

Α. 13,28%
Β. 16,68%
Γ. 17,81%
Δ. 10,23%

Λύση
Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα:

Έτος	**Ετήσιος Κύκλος Εργασιών σε χιλιάδες ευρώ**	**% Μεταβολή**
2012	1.044,23	-
2013	730,96	-30
2014	745,58	2
2015	603,92	-19
Σύνολο		-47

Συνεπώς, η μέση τιμή των % μεταβολών θα είναι $\overline{x}_M = -\frac{47}{3} = -15{,}667$.
Η διακύμανση αυτών θα είναι:

$$\sigma^2 = \frac{1}{3}\{(-30)^2 + (2)^2 + (-19)^2\} - (-15{,}667)^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\{900 + 4 + 361\} - 245{,}453 =$$

$$= \frac{1}{3}\{1.265\} - 245{,}453 = 176{,}214$$

Άρα η τυπική απόκλιση θα είναι $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{176{,}214} = 13{,}28\%$.

ΑΣΚΗΣΗ 9.

Έστω η τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει τις τιμές $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$ με αντίστοιχες σχετικές συχνότητες που εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα.

X_ι	**Σχετική συχνότητα**
1	c
2	1 - c

Εάν η τυπική απόκλιση σ της κατανομής είναι $\frac{\sqrt{3}}{4}$ και η τιμή της μεταβλητής X με τη μεγαλύτερη συχνότητα είναι 2 , ο συντελεστής μεταβλητότητας θα είναι:

A. 15,75%
B. 21,56%
Γ. 24,74%
Δ. Δεν μπορεί να υπολογισθεί

ΛΥΣΗ
Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα :

X_i	f_i	X_if_i	X_i^2	$X_i^2f_i$
1	c	c	1	c
2	1-c	2-2c	4	4-4c
Σύνολο	**1**	**2-c**		**4-3c**

Η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι: $\overline{X}= \Sigma f_iX_i = 2-c$, ενώ η διακύμανση αυτών:

$\sigma^2 = \Sigma X_if_i^2 - \overline{X}^2 = 4-3c-(2-c)^2 = 4-3c-(4-4c+c^2) = 4-3c-4+4c-c^2 = c-c^2$.

Αλλά, $\sigma^2 = (\frac{\sqrt{3}}{4})^2 = \frac{3}{16}$. Άρα $c-c^2 = \frac{3}{16}$, επομένως $c^2-c+\frac{3}{16} = 0$. Επιλύοντας την εξίσωση, έχουμε $X_1 = ¾$ και $X_2 = ¼$.

Δεδομένου ότι, η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα είναι 2, δεχόμαστε ότι c = ¼ και έχουμε:
$\overline{X}= 2-c = 2 – ¼ = 7/4$ και $\sigma = = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Άρα $CV = \frac{\sigma}{\overline{X}} = \frac{\sqrt{3/4}}{7/4} = \sqrt{3}/7 =$ =24,74%.

ΑΣΚΗΣΗ 10.
Τρεις θετικοί ακέραιοι σε αύξουσα σειρά x, y, z έχουν μέση τιμή μ = 20 και διάμεσο
δ = x + 11. Η ελάχιστη δυνατή τιμή του z είναι:

A. 23
B. 21
Γ. 26
Δ. 25

ΛΥΣΗ

Με δεδομένο ότι, η μέση τιμή των τριών αριθμών x, y και z είναι 20, θα έχουμε

$\bar{x} = \mu = 20 => (x + y + z)/3 = 20 => x + y + z = 60$ (1).

Αφού οι αριθμοί x, y και z είναι σε αύξουσα σειρά, θα πρέπει η διάμεσος $\delta = \mathrm{x} + 11$ να ταυτίζεται με τον μεσαίο αριθμό y και επίσης, ισχύει η διπλή ανίσωση $\mathrm{x} < y \leq \mathrm{z}$.

Η ισότητα ισχύει για την ελάχιστη τιμή του z.

Στη περίπτωση της ισότητας, θα έχουμε σύμφωνα με τα παραπάνω:

$\mathrm{z} = \mathrm{y} = \mathrm{x} + 11$ (2)

Η σχέση (1) γίνεται λόγω της (2): $\mathrm{x} + (\mathrm{x} + 11) + (\mathrm{x} + 11) = 60 => 3\mathrm{x} + 22 = 60 => 3\mathrm{x} = 38 => \mathrm{x} = 38/3$, αδύνατο διότι x ακέραιος.

Εάν, $\mathrm{z} = \mathrm{y} + 1$, τότε θα έχουμε $\mathrm{z} = (\mathrm{x} + 11) + 1 => z = x + 12$ και η (1) γίνεται $\mathrm{x} + (\mathrm{x} + 11) + (\mathrm{x} + 12) = 60 => 3\mathrm{x} + 23 = 60 => 3\mathrm{x} = 37 => \mathrm{x} = \frac{37}{3}$ αδύνατο για τον ίδιο λόγο.

Εάν $\mathrm{z} = \mathrm{y} + 2$, τότε θα έχουμε $\mathrm{z} = (\mathrm{x} + 11) + 2 => z = x + 13$ και η (1) γίνεται $\mathrm{x} + (\mathrm{x} + 11) + (\mathrm{x} + 13) = 60 => 3\mathrm{x} + 24 = 60 => 3\mathrm{x} = 36 => \mathrm{x} = 12$ δεκτό.

Άρα, οι τρείς αριθμοί θα είναι $\mathrm{x} = 12$, $\mathrm{y} =23$ και $\mathrm{z} =25$.

Εκδοχή 3

ΑΣΚΗΣΗ 1.

Το βάρος σε γραμμάρια πενήντα μήλων ομαδοποιήθηκε σε πέντε κλάσεις σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα. Κατά την εκτύπωση των αποτελεσμάτων, η αθροιστική σχετική συχνότητα επί τοις εκατό της δεύτερης και της τρίτης κλάσεις λόγω λάθους παραλήφθηκαν.

Κλάσεις βάρους (gr)	Αθροιστική σχετική συχνότητα επί τοις εκατό
86 – 92,4	16
92,4 – 98,8	
98,8 – 105,2	
105,2 – 111,6	84
111,6 - 118	100

Εάν η σχετική συχνότητα της δεύτερης κλάσης είναι $f_2 = 0,14$ και η διάμεσος του βάρους των μήλων είναι δ = 102,36 gr, η πιθανότητα να επιλέξουμε τυχαία ένα μήλο που να έχει βάρος μεταξύ 94 gr και 103,6 gr είναι:

Α. 29,5%

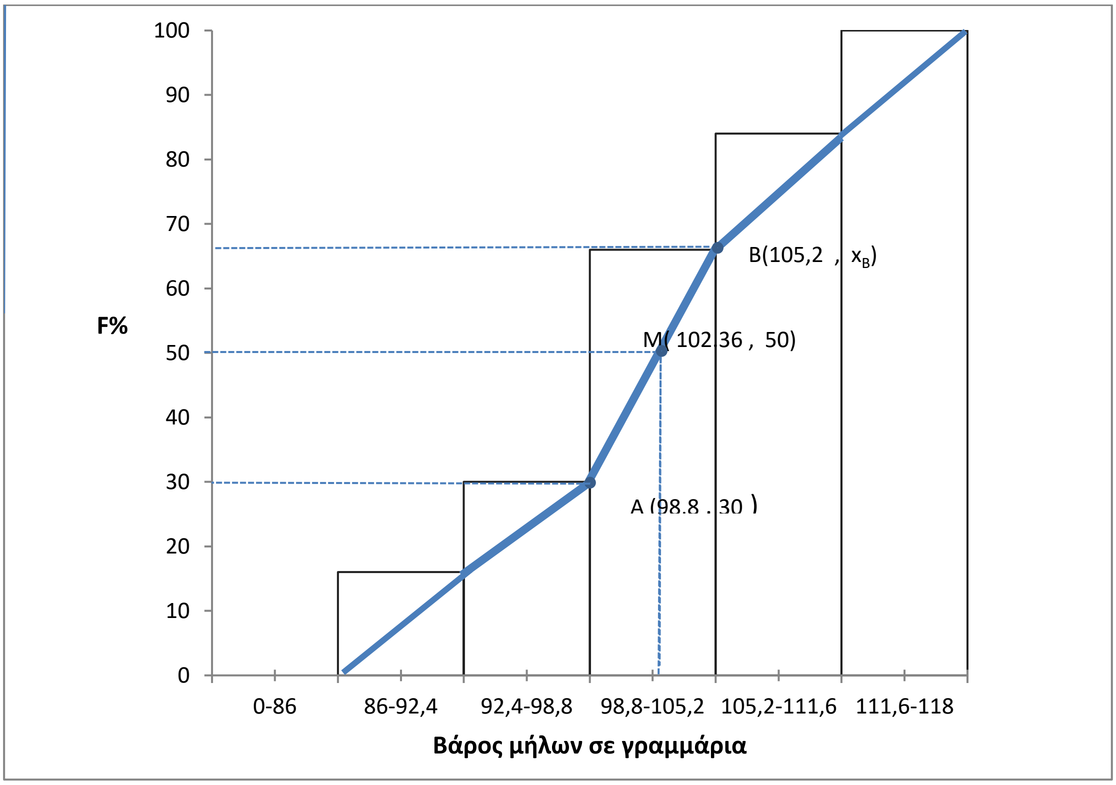
Β. 32,5%

Γ. 37,5%

Δ. 41,5%

ΛΥΣΗ

Δημιουργούμε το πολύγωνο των αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων %



Αφού η σχετική συχνότητα της δεύτερης κλάσης είναι f_2=0,14 θα είναι f_2%= 14% και F_2%=16%+14%=30%.

Οπότε για το σημείο Α που εικονίζεται στο παραπάνω διάγραμμα, θα είναι: Α(98,8 ,30) και για τη διάμεσο του βάρους των μήλων που αντιστοιχεί στο σημείο Μ θα είναι: Μ(102,36 ,50). Έστω, σημείο Β με τετμημένη 105,2 και άγνωστη τεταγμένη x_B και σημειώνουμε Β(105,2 , x_B).

Τότε, θα πρέπει $\lambda_{AM}=\lambda_{MB}$ => $\frac{y_M-y_A}{x_M-x_A}=\frac{y_B-y_M}{x_B-x_M}$ => $\frac{50-30}{102{,}36-98{,}8}=\frac{x-50}{105{,}2-102{,}36}$ => $\frac{20}{3.56}=\frac{x-50}{2.84}$ => $x\cong 66$.

Οπότε, δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα:

ΚΛΑΣΕΙΣ	ν_i	f_i%	F_i%
86-92,4	8	16	16
92,4-98,8	7	14	30
98,8-105,2	18	36	66
105,2-111,6	9	18	84
111,6-118	8	16	100
ΣΥΝΟΛΟ	**50**	**100**	

Παρατηρούμε ότι: 92,4+1,6=94. Αλλά $1{,}6=\frac{6{,}4}{4}=\ \frac{c}{4}$, όπου c το πλάτος της κλάσης.

Άρα $94=92{,}4+\frac{3}{4}c$

Ο αριθμός των μήλων, επομένως της κλάσης (92,4-98,8] θα είναι: $\frac{3}{4}$ (7)

Ομοίως της κλάσης (98,8-105,2] θα είναι: $\frac{3}{4}$ (18)

Άρα, η πιθανότητα να επιλεγεί μήλο με βάρος από 94 γρ. έως 103,6 γρ. θα είναι:

$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)(7)+\left(\frac{3}{4}\right)(18)}{50}=0{,}375$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2.</u>

Έστω Α το σύνολο των θετικών ακεραίων από 1 έως και το 45. Οι αριθμοί του συνόλου Α τοποθετούνται σε πέντε μοναδικές ομάδες των εννέα αριθμών έτσι ώστε κάθε αριθμός να ανήκει σε μια αποκλειστικά ομάδα και να εμφανίζεται μια και μοναδική φορά στην ομάδα του. Η μέγιστη τιμή που μπορεί να λάβει η μέση τιμή των διαμέσων των πέντε παραπάνω ομάδων είναι:

Α. 25
Β. 26
Γ. 31
Δ. 32

<u>Λύση</u>

Οι πέντε ομάδες θα πρέπει να είναι οι:

Α. 1, 2, 3, 4, 41, 42, 43, 44, 45
Β. 5, 6, 7, 8, 36, 37, 38, 39, 40
Γ. 9, 10, 11, 12, 31, 32, 33, 34, 35
Δ. 13, 14, 15, 16, 26, 27, 28, 29, 30
Ε. 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25

Οι διάμεσοι των παραπάνω ομάδων είναι οι : 41, 36, 31, 26, 21 και η μέση τιμή αυτών είναι 31.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 3.</u>

Πέντε χρηματιστές θέλουν να μοιράσουν τα μηνιαία κέρδη τους από την πώληση κάποιων πακέτων μετοχών. Συμφώνησαν εκ των προτέρων κάθε ένας να λάβει ένα στρογγυλό ποσό σε χιλιάδες Ευρώ. Η μέση τιμή και η διάμεσος των ποσών που θα λάβουν θα πρέπει να είναι ίσες με 7.000 Ευρώ και η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα να είναι μοναδική και ίση με 12.000 Ευρώ. Με βάση τα παραπάνω κριτήρια, η τυπική απόκλιση των ποσών που θα λάβουν θα είναι:

Α. 4.000,98 Ευρώ
Β. 4.516,64 Ευρώ
Γ. 4.876,45 Ευρώ
Δ. 4.968,66 Ευρώ

<u>Λύση</u>

Σύμφωνα με τα δεδομένα, θα πρέπει να ισχύει ότι οι πέντε τιμές θα είναι x, y, 7000, 12000, 12000. Δεδομένου ότι $\overline{x} = 35000$, x + y + 7000 + 12000 = 5.(7000) = 35000
Άρα, x + y =4000.

Επειδή η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα είναι μοναδική και ίση με 12000 θα πρέπει x=1000 και y = 3000.

Άρα, οι τιμές θα είναι 1000, 3000, 7000, 12000, 12000 και χρησιμοποιώντας τον τύπο της διακύμανσης $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - (\overline{x})^2$, υπολογίζουμε ότι σ=4.516,64 ευρώ.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4.</u>

Ο συντελεστής μεταβλητότητας του συνόλου Β = { x : x όλα τα ακέραια πολλαπλάσια του τρία με 0 < x ≤ 100.000} είναι:

Α. 48,86%
Β. 51,33%
Γ. 54,83%
Δ. 57,73%

<u>Λύση</u>

Έστω το σύνολο Β = $\{3(1), 3(2), 3(3), \ldots\ldots, 3(33.333)\}$.

Η μέση τιμή των τιμών του Β θα είναι: $\bar{x} = \frac{3\ (1+2+3+\cdots.+\ 33.333)}{33.333} = \frac{1+2+3+\cdots.+33.3333}{11.111}$ = 50.001 = 3(16.667).

Η διακύμανση αυτών θα είναι :

σ^2 =

$= \frac{1}{33.333}\{(3(1) - 3(16.667))^2 + (3(2) - 3(16.667))^2 + \ldots + (3(16.666) -$
$- 3(16.667))^2 + 0 + (3(16.668) - 3(16.667))^2 + \ldots. + (3(33.333) -$
$3(16.667))^2\}$

$= \frac{1}{33.333}\ 9\,\{16.666^2 + 16.665^2 + 2^2 + 1^2 + 1^1 + 2^2 + \ldots + + 16.666^2\} =$

$= \frac{9\ (2)}{33.333}\{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots. + 16.666^2\} =$

= 833.316.666.

Επομένως σ = $\sqrt{\sigma^2}$ = 28.867, 225

και CV = $\frac{28.867,225}{50.001}\ 100\% = 57,73\%$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 5.</u>

Εάν διαλέξουμε τυχαία ένα τριψήφιο αριθμό από το σύνολο των θετικών ακεραίων από το 100 μέχρι και το 999, η πιθανότητα ο αριθμός που θα προκύψει να μην έχει το ψηφίο 0 σε καμιά από τις τρεις θέσεις είναι:

Α. 79%
Β. 81%
Γ. 85%
Δ. Καμιά από τα παραπάνω

ΛΥΣΗ

Στο διάστημα [100 – 199] υπάρχουν 19 αριθμοί με 0 σε κάποιες από τις τρεις θέσεις. Άρα, από το 100 έως το 999 υπάρχουν 9(19) = 171 αριθμοί. Επομένως, χωρίς 0 σε κάποια θέση θα είναι 999 – 171 = 729 αριθμοί. Από το 100 έως το 999 υπάρχουν 900 αριθμοί. Άρα, η πιθανότητα θα είναι p = 729/900 = 0,81 = 81%.

ΑΣΚΗΣΗ 6.

Έστω ο δειγματικός χώρος Ω αποτελούμενος από ν ισοπίθανα ενδεχόμενα με 1<ν<25. Αν Α ένα ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου με Ρ(Α) = $\frac{1}{\sqrt{\nu}}$, τότε το πλήθος των στοιχείων του ενδεχομένου Α είναι:

Α. 2 ή 3 ή 4
Β. 1 ή 2 ή 3
Γ. 3 ή 4 ή 5
Δ. Δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα

Λύση

Έστω λ το πλήθος των στοιχείων του δειγματικού χώρου. Τότε:
$\frac{1}{\sqrt{\nu}} = \frac{\lambda}{\nu} => \nu = \lambda\sqrt{\nu} => \sqrt{\nu} = \lambda => \nu = \lambda^2$. Αλλά, 1 < ν < 25.

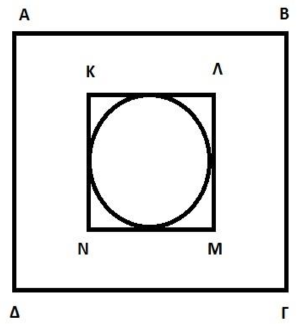
Επομένως, 1< λ^2< 25 και συνεπώς, λ = 2 ή λ = 3 ή λ = 4.

ΑΣΚΗΣΗ 7.

Ένα νόμισμα διαμέτρου ενός εκατοστού ρίχνεται σε ένα τραπέζι καλυμμένο με ένα πλέγμα γραμμών που απέχουν δύο εκατοστά μεταξύ τους. Ποια είναι η πιθανότητα το νόμισμα να πέσει μέσα σε ένα τετράγωνο; (Υποθέτουμε ότι το νόμισμα ρίχνεται με τυχαίο τρόπο).

Α. 28%
Β. 35%
Γ. 40%
Δ. Κανένα από τα παραπάνω

Λύση



Έστω ένα πλέγμα γραμμών ΑΒΓΔ πλευράς 2 cm. Είναι φανερό ότι εάν το κέντρο του νομίσματος βρίσκεται μέσα στο τετράγωνο ΚΛΜΝ πλευράς 1 cm, τότε το νόμισμα δεν θα αγγίζει το εξωτερικό πλέγμα. Συνεπώς, η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

P = Εμβαδόν (ΚΛΜΝ) / Εμβαδόν (ΑΒΓΔ) = $\frac{1}{4}$ = 0,25

ΑΣΚΗΣΗ 8.

Ο παρακάτω πίνακας μας παρουσιάζει τους συνολικούς ετήσιους κύκλους εργασιών της επιχείρησης Δ, από το έτος 2012 έως και το έτος 2015.

Έτος	**Ετήσιος Κύκλος Εργασιών σε χιλιάδες Ευρώ**
2012	1.044,23
2013	730,96
2014	745,58
2015	603,92

Η τυπική απόκλιση των ποσοστών μεταβολής του κύκλου εργασιών της επιχείρησης κατά τη διάρκεια των παραπάνω ετών είναι περίπου:

Α. 13,28%
Β. 16,68%
Γ. 17,81%
Δ. 10,23%

Λύση
Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα:

Έτος	**Ετήσιος Κύκλος Εργασιών σε χιλιάδες ευρώ**	**% Μεταβολή**
2012	1.044,23	-
2013	730,96	-30
2014	745,58	2
2015	603,92	-19
Σύνολο		-47

Συνεπώς, η μέση τιμή των % μεταβολών θα είναι $\bar{x}_M$ = - $\frac{47}{3}$ = -15,667.
Η διακύμανση αυτών θα είναι:
$\sigma^2 = \frac{1}{3}\{(-30)^2 + (2)^2 + (-19)^2\} - (-15{,}667)^2 =$
$= \frac{1}{3}\{900 + 4 + 361\} - 245{,}453 =$

$=\frac{1}{3}\{1.265\}$ - 245,453 = 176,214

Άρα η τυπική απόκλιση θα είναι σ = $\sqrt{\sigma^2}$ = $\sqrt{176{,}214}$ = 13,28%.

ΑΣΚΗΣΗ 9.
Έστω η τυχαία μεταβλητή Χ η οποία παίρνει τις τιμές $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$ με αντίστοιχες σχετικές συχνότητες που εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα.

X_ι	**Σχετική συχνότητα**
1	c
2	1 - c

Εάν η τυπική απόκλιση σ της κατανομής είναι $\frac{\sqrt{3}}{4}$ και η τιμή της μεταβλητής Χ με τη μεγαλύτερη συχνότητα είναι 2, ο συντελεστής μεταβλητότητας θα είναι:

Α. 15,75%
Β. 21,56%
Γ. 24,74%
Δ. Δεν μπορεί να υπολογισθεί

ΛΥΣΗ

Δημιουργούμε τον παρακάτω πίνακα:

X_i	f_i	$X_i f_i$	X_i^2	$X_i^2 f_i$
1	c	c	1	c
2	1-c	2-2c	4	4-4c
Σύνολο	**1**	**2-c**		**4-3c**

Η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι: $\overline{X} = \Sigma f_i X_i$ = 2-c, ενώ η διακύμανση αυτών:

$\sigma^2 = \Sigma X_i f_i^2 - \overline{X}^2 = 4\text{-}3c\text{-}(2\text{-}c)^2 = 4\text{-}3c\text{-}(4\text{-}4c\text{+}c^2) = 4\text{-}3c\text{-}4\text{+}4c\text{-}c^2 = c\text{-}c^2$.

Αλλά, $\sigma^2 = (\frac{\sqrt{3}}{4})^2 = \frac{3}{16}$. Άρα $c\text{-}c^2 = \frac{3}{16}$, επομένως $c^2\text{-}c\text{+}\frac{3}{16} = 0$. Επιλύοντας την εξίσωση, έχουμε $X_1 = ¾$ και $X_2 = ¼$.

Δεδομένου ότι, η τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα είναι 2, δεχόμαστε ότι c = ¼ και έχουμε:

$\overline{X}$= 2-c = 2 – ¼ = 7/4 και σ = = $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Άρα CV = $\frac{\sigma}{\overline{X}} = \frac{\sqrt{3/4}}{7/4} = \sqrt{3}/7$ = =24,74%.

ΑΣΚΗΣΗ 10.

Τρεις θετικοί ακέραιοι σε αύξουσα σειρά x, y, z έχουν μέση τιμή μ = 20 και διάμεσο δ = x + 11. Η ελάχιστη δυνατή τιμή του z είναι:

Α. 23
Β. 21
Γ. 26
Δ. 25

ΛΥΣΗ

Με δεδομένο ότι, η μέση τιμή των τριών αριθμών x, y και z είναι 20, θα έχουμε
$\bar{x} = \mu = 20 => (x + y + z)/3 = 20 => x + y + z = 60$ (1).

Αφού οι αριθμοί x, y και z είναι σε αύξουσα σειρά, θα πρέπει η διάμεσος $\delta = x + 11$ να ταυτίζεται με τον μεσαίο αριθμό y και επίσης, ισχύει η διπλή ανίσωση $x < y \leq z$.

Η ισότητα ισχύει για την ελάχιστη τιμή του z.

Στη περίπτωση της ισότητας, θα έχουμε σύμφωνα με τα παραπάνω:

$z = y = x + 11$ (2)

Η σχέση (1) γίνεται λόγω της (2): $x + (x + 11) + (x + 11) = 60 => 3x + 22 = 60 =>$ $3x = 38 => x = 38/3$, αδύνατο διότι x ακέραιος.

Εάν, $z = y + 1$, τότε θα έχουμε $z = (x + 11) + 1 => z = x + 12$ και η (1) γίνεται $x + (x + 11) + (x + 12) = 60 => 3x + 23 = 60 => 3x = 37 => x = \frac{37}{3}$ αδύνατο για τον ίδιο λόγο.

Εάν $z = y + 2$, τότε θα έχουμε $z = (x + 11) + 2 => z = x + 13$ και η (1) γίνεται $x + (x + 11) + (x + 13) = 60 => 3x + 24 = 60 => 3x = 36 => x = 12$ δεκτό.

Άρα, οι τρείς αριθμοί θα είναι $x = 12$, y =23 και z =25.